



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

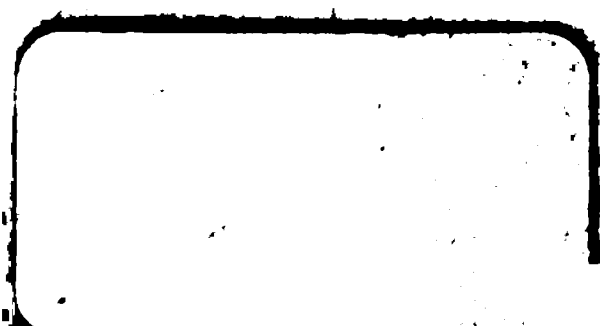
Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

- + *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.
- + *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.
- + *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.
- + *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertarti di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da <http://books.google.com>



IL NUOVO CIMENTO
ANNO XXIX.



IL NUOVO CIMENTO

GIORNALE FONDATO PER LA FISICA E LA CHIMICA

DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA

CONTINUATO

PER LA FISICA ESPERIMENTALE E MATEMATICA

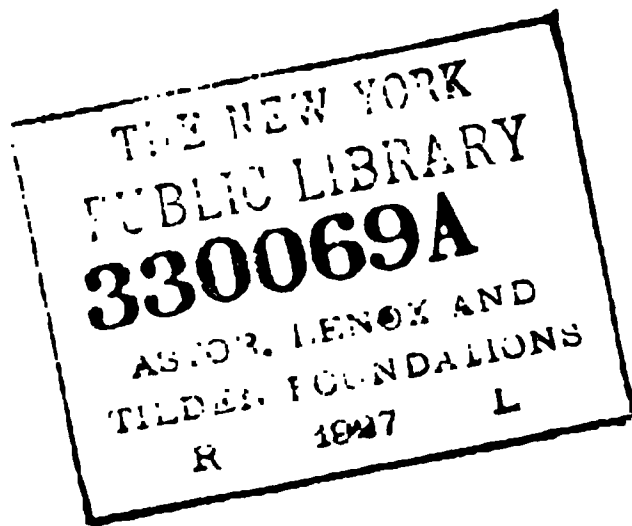
da E. BETTI e R. FELICI

Terza serie Tomo XIV.

P I S A

TIP. PIERACCINI DIR. DA P. SALVIONI

1883



NOV 1927
330069
330069

STUDI SULLA RIFLESSIONE CRISTALLINA.

ERRATA CORRIGE all' articolo: *Sulle figure elettrochimiche alla superficie di un cilindro*; del Dott. V. VOLTERRA, inserito nel fascicolo di Marzo-Aprile.

E R R O R I

C O R R E Z I O N I

Fig. 127, lin. 16	$\psi(-x)=\psi(x), \psi(-y)=-\psi(y)$	$\psi(-x,y)=\psi(x,y), \psi(x,-y)=-\psi(x,y)$
» 139, for. (4)	$\frac{4DR}{\mu} (\varepsilon - k'^2 K)$	$\frac{4DR}{\mu} (E - k'^2 K)$
» » lin. 14	$\varepsilon =$	$E =$
» 123, » 12	$-\varepsilon$	$-\varepsilon_1$
» 136, » 14	$Re^{i(\pi-\alpha)}, Re^{i(\pi-\alpha)}$	$Re^{i(\pi-\alpha)}, Re^{i(\pi+\alpha)}$
» » » 19	E'	ε'
» » » 21	E'	ε'

SIA SO IL RAGGIO INCIDENTE ED O IL PUNTO D'INCIDENZA.

Sia SO (fig. 2) ⁽¹⁾ il raggio incidente ed O il punto d'incidenza. Sia OX la traccia del piano d'incidenza sulla faccia riflettente ed OA la direzione dell'asse ottico. Questa giace nella faccia riflettente e fa colla OX un angolo $\angle AOX = \omega$. Siano infine OZ normale alla faccia ed OY perpendicolare a OZ ed a OX.

(1) *Continuazione e fine.* Vedi pag. 89 del volume precedente.

(2) Vedi Tav. 8. fascicolo di Marzo-Aprile.

STUDI SULLA RIFLESSIONE CRISTALLINA;
PER GIUSEPPE BASSO (1).

PARAGRAFO QUARTO

Verificazioni.

Una teoria sulla luce riflessa dai mezzi birifrangenti sarebbe immediatamente da rigettarsi, quando introdotte nelle formole a cui essa conduce le condizioni che riducono il mezzo birifrangente a mezzo isotropo, si ottenessero risultati discordi da quelli di Fresnel, i quali hanno ricevuta in molte guise la sanzione sperimentale. Perciò gioverà applicare, a modo di verifica, le formole dei paragrafi precedenti ad alcuni casi particolari, e precisamente a quelli che si possono far rientrare nella teoria della riflessione sui mezzi isotropi.

*Superficie riflettente parallela all'asse ottico;
casi di rifrazione uniradiale.*

Sia SO (fig. 2) (2) il raggio incidente ed O il punto d'incidenza. Sia OX la traccia del piano d'incidenza sulla faccia riflettente ed OA la direzione dell'asse ottico. Questa giace nella faccia riflettente e fa colla OX un angolo $\angle AOX = \omega$. Siano infine OZ normale alla faccia ed OY perpendicolare a OZ ed a OX.

(1) *Continuazione e fine.* Vedi pag. 89 del volume precedente.

(2) Vedi Tav. 3. fascicolo di Marzo-Aprile.

all'asse, esso si presenta quando l'asse ottico essendo parallelo o normale al piano d'incidenza, il piano di polarizzazione della luce incidente è parallelo o normale allo stesso piano d'incidenza. Si hanno perciò quattro casi distinti, cioè:

$$1^{\circ} \text{ Caso: } \omega = 0, \quad \theta = 0.$$

Si trova subito:

$$\phi' = 0; \quad \phi = 0; \quad \alpha_1 = 0; \quad \beta_1 = 1; \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \quad \beta_2 = 0.$$

Quindi si ha dalle (8):

$$H = 0, \quad K = 1,$$

e dalle (10), (11):

$$v = \frac{2 H K}{M} = 0; \quad v' = \frac{-M + 1}{M + 1}$$

E siccome si ha

$$M = \frac{\cos r}{b \cos i} \quad \text{e} \quad \frac{1}{b} = \frac{\sin i}{\sin r},$$

sarà

$$I = v'^2 = \frac{\sin^2(i - r)}{\sin^2(i + r)}, \quad \psi = 0.$$

Cioè il raggio riflesso è polarizzato nel piano d'incidenza ed ha la stessa intensità che avrebbe secondo la teoria Fresnel, se la superficie riflettente appartenesse ad un mezzo isotropo d'indice $\frac{1}{b}$.

$$2^{\circ} \text{ Caso: } \omega = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Si ottiene:

$$\phi' = 0; \quad \phi = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_1 = 0; \quad \beta_1 = 1; \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \quad \beta_2 = 0.$$

Dalle (8) si ricava:

$$K = 0;$$

e per essere

$$\sqrt{1+t^2} = \frac{\sqrt{1+(a^2-b^2)\sin^2 i}}{\sqrt{1-b^2\sin^2 i}} = \frac{\sqrt{1+(a^2-b^2)\sin^2 i}}{\cos r}$$

si ha

$$H = \frac{1}{\cos i \sqrt{1+t^2}} = \frac{\cos r}{\cos i \sqrt{1+(a^2-b^2)\sin^2 i}}$$

Quindi la (10) darà

$$v = \frac{-N + H^2}{N + H^2},$$

e la (11)

$$v' = 0.$$

L'espressione generale di N data dalla seconda delle equazioni (5) nel nostro caso diventa:

$$N = \frac{\cos r [1 + (a^2 - b^2) \sin^2 i]}{a \cos i},$$

perchè si ha qui:

$$L \cos \rho = a \sqrt{1 - b^2 \sin^2 i} = a \cos r; \quad \text{e} \quad \frac{1}{U^2} = \frac{1 + (a^2 - b^2) \sin^2 i}{a^2}.$$

Perciò se, per brevità, scriviamo

$$T = 1 + (a^2 - b^2) \sin^2 i,$$

sarà

$$H = \frac{\cos r}{\cos i \sqrt{T}}, \quad N = \frac{T \cos r}{a \cos i}.$$

Sostituendo nella espressione particolare, ora trovata, di v , sarà:

$$v = \frac{a \cos r - T^2 \cos i}{a \cos r + T^2 \cos i}.$$

Infine l'intensità della luce riflessa è:

$$I = v^2 = \left(\frac{a \cos r - T^2 \cos i}{a \cos r + T^2 \cos i} \right)^2.$$

Essendo in generale $\tan \psi = \frac{v}{v'}$, si trova nel caso nostro $\psi = \frac{\pi}{2}$,

cioè la luce riflessa è polarizzata perpendicolarmente al piano d'incidenza.

Se il mezzo che si considera, invece d'essere cristallino, fosse isotropo, si avrebbe $a = b$, e per conseguenza,

$$T = 1, \quad I = \left(\frac{a \cos r - \cos i}{a \cos r + \cos i} \right)^2.$$

Ma in tal caso si avrebbe: $a = \frac{\sin r}{\sin i}$; epperciò:

$$I = \left(\frac{\sin 2r - \sin 2i}{\sin 2r + \sin 2i} \right)^2 = \frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}.$$

Quest'ultima è appunto l'espressione trovata da Fresnel per la riflessione sopra un mezzo isotropo della luce polarizzata perpendicolarmente al piano d'incidenza.

3.° Caso:

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = 0.$$

Si trova subito:

$$\phi = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_1 = \cos r; \quad \beta_1 = 0; \quad \alpha_2 = 0; \quad \beta_2 = 1.$$

Per conseguenza si ha dalle (8):

$$H = 0, \quad K = 1,$$

dalla (10):

$$v = 0,$$

e dalla (11):

$$v' = \frac{1 - N}{1 + N},$$

essendo anche qui, come nel caso precedente:

$$N = \frac{T \cos r}{a \cos i}.$$

si ottiene subito:

$$v' = \frac{a \cos i - T \cos r}{a \cos i + T \cos r}.$$

Quindi:

$$I = v'^2 = \left(\frac{a \cos i - T \cos r}{a \cos i + T \cos r} \right)^2 \quad \text{ed inoltre} \quad \psi = 0.$$

In quanto all'angolo Ω che la normale all'elemento d'onda straordinaria in M fa coll'asse ottico, esso nel nostro caso è uguale all'angolo ITM. Perciò si avrà:

$$\operatorname{tang} \Omega = \frac{y}{\frac{1}{\operatorname{sen} i} - x} = \frac{b \operatorname{sen} i}{\sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 i}}; \text{ quindi } \cos^2 \Omega = \frac{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 i}{1 - (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 i}$$

La formola generale:

$$U^2 = a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \Omega$$

diventa nel nostro caso

$$U^2 = \frac{b^2}{1 - (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 i}.$$

Perciò le due equazioni (5) qui si possono scrivere così:

$$M = \frac{\cos r}{b \cos i}, \quad N = \frac{\sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 i}}{b \cos i} [1 - (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 i].$$

Venendo alle direzioni delle linee di vibrazione nei moti rifratti, si vede che il piano di polarizzazione del raggio ordinario è lo stesso piano d'incidenza; perciò si avrà:

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 1.$$

Nel raggio straordinario le linee di vibrazione hanno la direzione della retta TM (fig. 3) che è intersezione del piano d'onda straordinaria e della sezione principale, perciò sarà:

$$\alpha_2 = \cos \Omega = \frac{\sqrt{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 i}}{\sqrt{1 - (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 i}}, \quad \beta_2 = 0.$$

Si noti ancora che si ha

$$\phi = \theta.$$

Le equazioni generali (8) diventano:

$$H = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos i} \sqrt{\frac{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 i}{1 - (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 i}}, \quad K = \cos \theta.$$

Per procedere alle sostituzioni nelle espressioni generali (10), (11) converrà, per semplicità di scrittura, porre:

$$\cos \mu = \sqrt{1 - a^2 \sin^2 i},$$

$$\cos \nu = \sqrt{1 - (a^2 - b^2) \sin^2 i},$$

cosicchè μ e ν sono gli angoli di rifrazione che corrisponderebbero all'angolo i d'incidenza per due mezzi isotropi, rispettivamente d'indice $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

Mediante semplici calcoli materiali si ottiene:

$$M \cos^2 \phi + N \sin^2 \phi = \frac{\cos^2 \theta \cos r + \sin^2 \theta \cos \mu \cos^2 \nu}{b \cos i},$$

$$H^2 + K^2 = \frac{\cos^2 \theta \cos^2 i \cos^2 \nu + \sin^2 \theta \cos^2 \mu}{\cos^2 i \cos^2 \nu},$$

$$K^2 - H^2 = \frac{\cos^2 \theta \cos^2 i \cos^2 \nu - \sin^2 \theta \cos^2 \mu}{\cos^2 i \cos^2 \nu},$$

$$2 H K = \frac{2 \cos \mu \sin \theta \cos \theta}{\cos i \cos \nu}.$$

Nello eseguire le sostituzioni si possono dare alle espressioni di v e di v' forme relativamente semplici ed abbastanza comode per applicazioni a calcoli numerici.

Essendo noti gli angoli r, μ, ν perchè essi si deducono subito dai valori dati di i, a e b , possiamo valercene per determinare cinque quantità $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, tali da soddisfare le relazioni:

$$\alpha = \cos \mu \cos^2 \nu - \cos r$$

$$\beta = \cos \mu - \cos \nu \cos i$$

$$\gamma = \cos \mu + \cos \nu \cos i$$

$$\delta = \cos r + b \cos i$$

$$\varepsilon = \cos r - b \cos i.$$

Si possono in seguito calcolare le nove quantità determinate dalle relazioni seguenti:

$$p = \delta \cos^2 \nu \cos i - 2b \cos \mu \cos \nu \cos i$$

$$p' = \varepsilon \cos^2 \nu \cos i$$

$$m = \alpha \cos^2 \nu \cos i - b \beta^2$$

$$m' = \alpha \cos^2 \nu \cos i + b \beta^2$$

$$n = \alpha \cos^2 \nu \cos i + b \beta \gamma$$

$$s = \delta \cos^2 \nu \cos i$$

$$q = m + p$$

$$q' = m' + p'$$

$$t = n + s.$$

Ciò fatto, le espressioni cercate di ν e di ν' si possono presentare sotto la forma:

$$\nu = -\sin \theta \frac{p \cos^2 \theta + q \sin^2 \theta}{s \cos^2 \theta + t \sin^2 \theta},$$

$$\nu' = -\cos \theta \frac{p' \cos^2 \theta + q' \sin^2 \theta}{s \cos^2 \theta + t \sin^2 \theta}.$$

L'intensità della luce riflessa in rapporto a quella della luce incidente è:

$$(12) \quad I = \frac{\sin^2 \theta (p + m \sin^2 \theta)^2 + \cos^2 \theta (p' + m' \sin^2 \theta)^2}{(s + n \sin^2 \theta)^2}$$

L'angolo ψ che il piano di polarizzazione del raggio riflesso fa col piano d'incidenza è dato nel modo seguente:

$$\tan \psi = \tan \theta \frac{p \cos^2 \theta + q \sin^2 \theta}{p' \cos^2 \theta + p' \sin^2 \theta} = \tan \theta \frac{p + m \sin^2 \theta}{p' + m' \sin^2 \theta}$$

Consideriamo le conseguenze più semplici che scaturiscono dalle formole ora trovate.

1°. Se supponiamo $\theta=0$, si ha $\nu=0$, $\nu' = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}$ e $\psi=0$. Cioè la riflessione ha luogo secondo la legge di Fresnel e come se la superficie riflettente appartenesse ad un mezzo isotropo.

I, dovevo spostare la lampada tanto da fare $d = 132$ mm. La tavola numerica della pag. 18 dà, per questo caso, $I = 0,1282$. Perciò, dalla formoletta $w = I d^2$ ricavasi $w = 2234$, e si può ammettere che questo valore si mantenga inalterato anche nelle esperienze successive. Poscia, essendosi, mediante la rotazione del Nicol, dati a θ successivamente i valori 30° , 45° , 75° , 90° , si trovò che per rendere $j = I$ dovevasi fare d rispettivamente eguale a millimetri 159, 196, 438, 444. Ora la relazione $I = \frac{2234}{d^2}$ dà per valori di I corrispondenti a questi trovati di d , numeri che non sono molto diversi da quelli teorici contenuti nella tavola a pag. 18, e che sono iscritti nella prima delle tre tabelle seguenti. Tali tabelle riassumono i risultati delle principali misure che ho potuto eseguire per angoli d'incidenze eguali a 45° , 60° , e 75° e per varii valori di azimut θ di polarizzazione.

1° Per $i = 45^\circ$ si ha $w = 2234$

θ	0°	30°	45°	75°	90°
d^{mm}	132	159	196	438	444
I	0,1282	0,0883	0,0581	0,0116	0,0113

2° Per $i = 60^\circ$ ottenni $w = 1796$

θ	0°	30°	45°	60°	90°
d^{mm}	89	108	150	214	355
I	0,2267	0,1540	0,0798	0,0392	0,0142

3° Per $i = 75^\circ$ trovai $w = 1819$

θ	0°	45°	60°	90°
d^{mm}	63	93	111	117
I	0,4582	0,2103	0,1476	0,1329

Dai quali risulta, come era da prevedere, che la forma dei depositi rimane la stessa comunque varii l'intensità della corrente purchè rimanga costante la sua densità in seno al liquido.

In questa, come in tutte le altre serie, dopo ogni determinazione, il cilindro veniva messo nell'acqua acidulata per istaccare lo zinco, e poi pulito con tripolo e sfregato con pelle di camoscio.

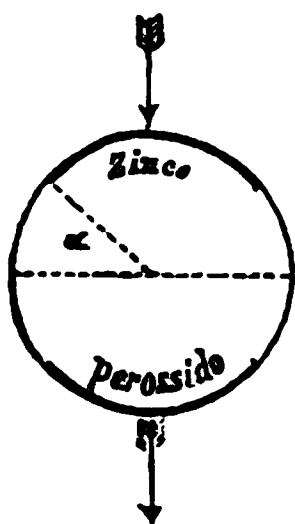
5. Stabilito esservi una relazione fra l'arco che apparisce scoperto e la densità della corrente, bisognava vedere di qual forma fosse, ossia in altre parole, come l'arco che misurava la distanza fra i due depositi dipendesse dalla densità della corrente.

Perciò, tenendo costante il peso specifico del solfato di zinco, feci una lunga serie di determinazioni dell'arco scoperto corrispondente a varie intensità, dalla quale potei dedurre:

che la densità $D \left(\frac{\text{ampère}}{\text{cent.}^2} \right)$ della corrente è inversamente proporzionale al prodotto $\alpha \text{ sen } \alpha$, essendo α (fig. 2) la distanza angolare fra i due depositi, ciò che si può esprimere con:

$$D \alpha \text{ sen } \alpha = N.$$

Fig. 2.



Ecco due serie fatte con densità molto differenti fra di loro:

1ª Peso specifico della soluzione 1,060. Temp. 22°,5

D	α	sen α	$D \alpha \text{ sen } \alpha$
0,0113	43°,2	0,684	0,333
0,0121	42,3	0,673	0,344
0,0140	38,7	0,625	0,339
0,0160	36,0	0,588	0,338
0,0185	33,3	0,549	0,338
0,0243	28,8	0,482	0,337

Media 0,338

2^a Peso specifico della soluzione 1,417. Temp. 22°,0

D	α	sen α	D α sen α
0,0144	57°,6	0,844	0,554
0,0147	52,2	0,790	0,605
0,0178	45,0	0,707	0,566
0,0198	43,2	0,685	0,585
0,0241	38,7	0,625	0,583
0,0274	35,1	0,675	0,553
0,0322	32,4	0,536	0,559

Media 0,572

I vari valori della costante si allontanano dal valor medio non più di 5,5 per cento.

Dovendosi far le letture finchè il cilindro è ancora immerso ed essendo una particella lunga soltanto 0^{mm}, 88, l'errore che si commette nella lettura oscilla fra mezza divisione in più e mezza divisione in meno.

A una mezza particella corrisponde una variazione nel valore della costante di 10% per gli archi minori e di 8% in media, per cui le differenze nel valore di N possono derivare da errore di osservazione.

Ad ogni determinazione veniva cambiato il liquido perchè i prodotti dell'elettrolisi, che succedeva intorno al cilindro, non ne cambiassero la natura.

6. Per vedere l'influenza della conducibilità μ dell'elettrolita determinai per varie concentrazioni del solfato di zinco il valore della costante N e la conducibilità specifica.

Peso specifico	N	$c \mu$	$\frac{N}{c \mu}$
1,060	0,338	1,00	0,34
1,120	0,488	1,60	0,31
1,180	0,573	1,95	0,29
1,240	0,618	2,11	0,29
1,300	0,627	2,11	0,29
1,360	0,624	2,06	0,30
1,417	0,572	1,82	0,31
1,448	0,524	1,66	0,32

i numeri della seconda colonna sono risultati come medie da serie analoghe a quelle riportate superiormente.

I numeri della colonna segnata $c\mu$ sono semplicemente proporzionali alla conducibilità specifica μ corrispondente ai vari pesi specifici della soluzione di solfato di zinco indicati nella prima colonna. Per determinarli mi sono servito del metodo già usato da Kohlrausch ⁽¹⁾, cioè del ponte di Wheatstone con correnti alternate e sostituendo al galvanometro il telefono. Sarebbe stato superfluo spingere le determinazioni oltre i centesimi, essendo già approssimata la seconda cifra significativa del valore di N.

Il rapporto $\frac{N}{c\mu}$ si mantiene pressochè costante e però, ricordando che si è chiamato N il prodotto $D \alpha \sin \alpha$, si vede che il fenomeno è rappresentato approssimativamente dalla formula:

$$\frac{D \alpha \sin \alpha}{\mu} = \text{cost.}$$

7. Ero giunto a questi risultati sperimentali, quando il Dott. Vito Volterra, che si occupava del problema dal lato teorico, partendo dall'idea che l'intervallo che apparisce scoperto fra i due ioni fosse dovuto alla forza elettromotrice di polarizzazione, stabiliva che i due depositi dovevano essere eguali e che doveva sussistere la relazione seguente fra la densità D della corrente, il raggio R del cilindro, le forze elettromotrici ε_1 ed ε_2 , che si sviluppano nei punti dove avviene il deposito continuo dei due ioni e l'angolo α ;

$$(1) \quad \varepsilon = \frac{4DR}{\mu} [E - k_1^2 K].$$

dove K ed E indicano i noti integrali ellittici completi, cioè:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi}}, \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \phi} d\phi,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad k = \sin \alpha, \quad k_1 = \cos \alpha.$$

(1) *Ann. der Physik und Chemie*, nuova serie, vol. XI, 1880, p. 653.

Essendo nelle ricerche sopra descritte rimaste costanti le quantità ϵ ed R , la formula teorica differiva da quella dedotta dall'esperienza per contenere il fattore $E - k_1^2 K$ in luogo del prodotto $\alpha \sin \alpha$, ma nei limiti fra cui si può sperimentare (cioè fra 20° e 60°) il valore della quantità $E - k_1^2 K$ coincide a meno di $\frac{1}{100}$ col valore di $\frac{3}{4} \alpha \sin \alpha$ come risulta dalla seguente tabella (')

α	$E - k_1^2 K$	$\frac{3}{4} \alpha \sin \alpha$	<i>Differenza</i>
10°	0,0240	0,0227	+ 0,0073
20°	0,0930	0,0895	+ 0,0035
30°	0,2022	0,1962	+ 0,0060
40°	0,3446	1,3366	+ 0,0080
50°	0,5094	0,5013	+ 0,0081
60°	0,6719	0,6801	— 0,0082
70°	0,8254	0,8610	— 0,0356
80°	0,9450	1,0318	— 0,0850.

E siccome si è visto che gli errori di osservazione possono portare una differenza perfino di 8% , così i risultati sperimentali erano pienamente confermati dalla formula teorica, e questa alla sua volta era in parte verificata dall'esperienza. Però volli fare una verifica più completa.

8. Il modo più diretto sarebbe stato di misurare tutte le quantità che entrano nella formula e vedere se questa si riduceva ad una identità: ma mi parve più comodo e meno soggetto ad errori il metodo seguente.

Essendo $D = \frac{I}{s}$, dove I è l'intensità della corrente ed s la sezione del liquido, la formula (1) diventa:

$$(2) \quad \frac{\epsilon \mu s}{I} = 4 R [E - k_1^2 K].$$

ϵ è la somma delle forze elettromotrici di polarizzazione massima, che si sviluppano sul cilindro immerso nell'elettrolita, ed

(1) Per calcolare i vari valori $E - k_1^2 K$ mi sono servito delle tavole che trovansi nel *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* del Bertrand.

è la stessa che si sviluppa in un voltmetro con lo stesso elettrolita, e con elettrodi della stessa natura del cilindro.

Supponiamo che tale voltmetro sia costituito da una cassetta esattamente parallelepipeda di cui gli elettrodi occupino interamente due facce opposte. Sia l la sua lunghezza ed s la superficie utile degli elettrodi. Se si indica con i l'intensità della corrente secondaria che si ottiene chiudendo il circuito con un conduttore di piccolissima resistenza, dopo aver fatto passare una corrente per un tempo bastante perchè la polarizzazione abbia raggiunto il massimo, sarà :

$$i = \frac{\epsilon}{R}, \quad \text{e } 3$$

ed essendo la resistenza opposta dal liquido

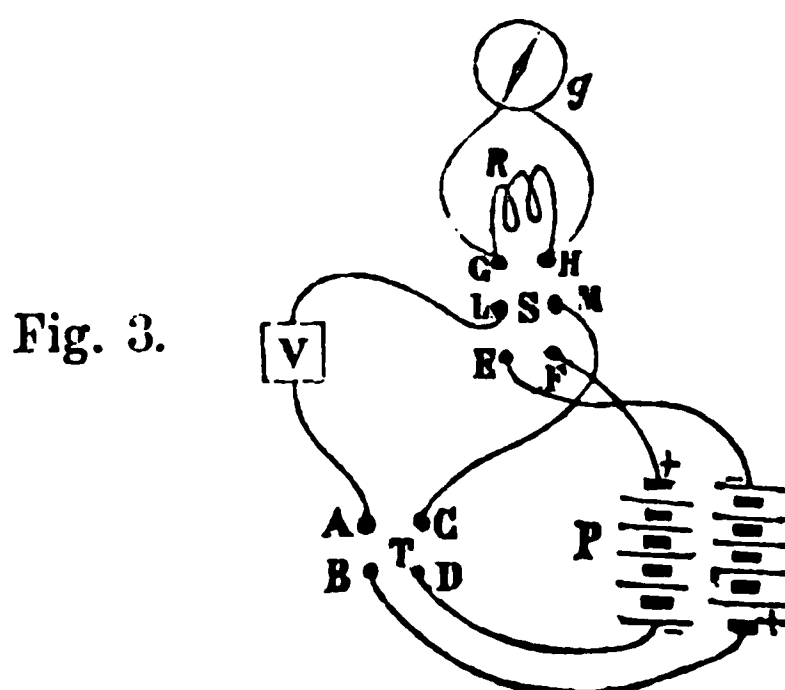
$$R = \frac{l}{s\mu},$$

ove μ indica la conducibilità specifica dell'elettrolita, la (2) si cambia nella :

$$\frac{i}{I} = \frac{4R}{l} [E - k_1 K].$$

La quale dà modo di calcolare mediante l'angolo α il valore del rapporto delle due intensità i ed I che può essere determinato coll'esperienza.

9. Ecco la disposizione che mi parve più opportuna per fare l'esperienza in maniera che le misure di i ed I potessero succedersi rapidamente. V (fig. 3) è la vaschetta che serviva anche



da voltmetro; T è un commutatore che permette di mettere in comunicazione A con B e C con D, oppure A con C e B con D;

Gli elettrodi, che venivano sostituiti a quelli di zinco nella seconda parte dell'esperienza, ed il cilindro furono in alcune prove coperti di un grosso strato di rame elettrolitico affinchè si potessero ritenere della stessa natura.

Ecco i risultati dell'esperienza:

Distanza degli elettrodi 10^c,10

Raggio del cilindro 1^c,42

d	d_1	α
92,5	16,0	41 ^o ,4
88,0	23,0	45,0
90,0	19,0	41,4
139,0	23,0	36,0

$\frac{i}{I}$ osservato	$\frac{i}{I}$ calcolato	Δ	
0,173	0,209	—0,036	Elettrodi e cilindro di rame del commercio.
0,261	0,239	+0,022	
0,211	0,209	+0,002	Elettrodi e cilindro di rame ramato elettroliticamente.
0,165	0,159	+0,006	

Si noti che ad un errore di mezzo centesimo della circonferenza nella determinazione di α corrisponde una variazione nel valore di $\frac{i}{I}$ in media di 6 a 7 per cento.

10. Quindi mi pare che la formula teorica riesca verificata dall'esperienza e si possa concludere che *le apparenze degli ioni, che si depositano su di un conduttore immerso in un liquido attraversato dalla corrente, sono conformi alla teoria della distribuzione delle correnti.*

11. Il Prof. Roiti, come si è detto, ha osservato che i depositi elettrolitici subiscono una dissipazione se restano immersi nel liquido che servì da elettrolita.

Accennerò qui ad alcune esperienze da me fatte per vedere se ciò potesse contribuire a fare apparire diversa la loro estensione.

SOPRA IL MOTO DEI FLUIDI ELASTICI;
NOTA DI ENRICO BETTI.

L'equazioni del moto dei fluidi elastici, sotto la forma di *Lagrange*, sono

$$(1) \quad \sum_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{dx_i}{da_s} = X_s - v \frac{dp}{da_s}, \quad s = 1, 2, 3$$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{da_1} & \frac{dx_2}{da_1} & \frac{dx_3}{da_1} \\ \frac{dx_1}{da_2} & \frac{dx_2}{da_2} & \frac{dx_3}{da_2} \\ \frac{dx_1}{da_3} & \frac{dx_2}{da_3} & \frac{dx_3}{da_3} \end{vmatrix} = \frac{v}{v_0}$$

nelle quali a_1, a_2, a_3 denotano le coordinate cartesiane di un elemento del fluido nel tempo $t=0$; x_1, x_2, x_3 sono le coordinate dello stesso elemento dopo il tempo t : p è la pressione, v il volume specifico dopo il tempo t , e v_0 il volume specifico nel tempo $t=0$, e $\frac{X_1 dS}{v}$, $\frac{X_2 dS}{v}$, $\frac{X_3 dS}{v}$ denotano le componenti delle

forze che agiscono sopra gli elementi: $\frac{dS}{v}$ della massa fluida.

Le quantità da determinarsi in funzione di a_1, a_2, a_3 e t sono in numero di cinque, cioè le tre coordinate x_1, x_2, x_3 , la pressione p e il volume specifico v , e l'equazioni sono soltanto quattro. Ma supponendo la temperatura costante in tutta la massa fluida e in tutto il tempo, la esperienza deve somministrare per ogni fluido una relazione tra v e p e quindi la quinta equazione. La ipotesi della costanza della temperatura non può verificarsi nel maggior numero dei casi che si presentano nella natura e in special modo in quelli dell'atmosfera. Quindi è necessario di abbandonarla e introdurre ancora un'altra funzione da determinarsi, cioè la temperatura, e stabilire, oltre l'equazioni

(1), (2) e la relazione somministrata dalla esperienza tra p , v e la temperatura, un'altra equazione.

Sia T la temperatura assoluta, e

$$(3) \quad p = p(v, T)$$

la relazione data dall'esperienza tra p , v e T .

Se denotiamo con $\frac{Q dS}{v}$ la quantità di calore che un elemento di fluido di massa: $\frac{dS}{v}$ e di coordinate iniziali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ acquista nel tempo t , e con μ l'entropia della massa unitaria, ossia con $\mu \frac{dS}{v}$ l'entropia dello elemento di massa: $\frac{dS}{v}$, e con E l'equivalente meccanico del calore, avremo dalla Termodinamica,

$$E \frac{d}{dt} \left(Q \frac{dS}{v} \right) = T \frac{d \mu \frac{dS}{v}}{dt}.$$

Ma per la conservazione della massa

$$\frac{d \frac{dS}{v}}{dt} = 0.$$

Quindi

$$(4) \quad E \frac{dQ}{dt} = T \frac{d\mu}{dt}$$

e l'equazioni (1) (2) (3) e (4) saranno le sei equazioni sufficienti alla determinazione del moto del fluido elastico, quando siano conosciuti lo stato iniziale e le condizioni ai limiti.

La entropia specifica μ si ottiene in funzione di v e di T per mezzo delle note equazioni

$$(5) \quad d\mu = \frac{dU}{dT} \frac{dT}{T} + \left(\frac{dU}{dv} + p \right) \frac{dv}{T}$$

$$(6) \quad \frac{dU}{dv} = T^2 \frac{d \frac{p}{T}}{dT}$$

dove U denota l'energia specifica.

Dalla (6) integrando si ottiene

$$(7) \quad U = \tau + T \int \frac{d \frac{p}{T}}{d T} dv$$

denotando con τ una funzione della sola T .

Derivando la (7) se ne deduce

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dT} \frac{1}{T} &= \frac{d\tau}{dT} d \log T + \frac{d}{dT} \int \frac{dp}{dT} dv \\ \left(\frac{dU}{dv} + p \right) \frac{1}{T} &= \frac{dp}{dT} = \frac{d}{dv} \int \frac{dp}{dT} dv. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (5) e integrando

$$(8) \quad \mu = \int \frac{d\tau}{dT} d \log T + \int \frac{dp}{dT} dv + C$$

essendo C una costante.

Nel caso dei gaz perfetti, denotando con c_p e con c_v i calorigi specifici a pressione e a volume costanti, abbiamo

$$p = E (c_p - c_v) \frac{T}{v},$$

$$\tau = E c_v T$$

e c_p e c_v costanti. Onde

$$\mu = C + E c_v \log T + E (c_p - c_v) \log v,$$

Ma

$$\log v = \log T - \log p + \text{costante}$$

onde

$$\mu = C + E \log \frac{T^{c_p}}{p^{c_p - c_v}},$$

e ponendo

$$\frac{c_p}{c_v} = k$$

$$(9) \quad \mu = C + E \log \frac{T^k}{p^{k-1}}$$

e anche

$$(10) \quad \mu = C_1 + E \log T v^{k-1}$$

Se poniamo

$$(11) \quad \chi = U + p v$$

la nota equazione

$$T d\mu = dU + p dv$$

diviene

$$d\chi = T d\mu + v dp$$

e quindi

$$(12) \quad T = \frac{d\chi}{d\mu}, \quad v = \frac{d\chi}{dp}.$$

Nel caso dei gaz perfetti sarà

$$\chi = E c_p T = E c_p p^{\frac{k-1}{k}} e^{\frac{\mu-C}{E}}.$$

Osservando le equazioni (12) avremo

$$v \frac{dp}{da_s} = \frac{d\chi}{dp} \frac{dp}{da_s} = \frac{d\chi}{da_s} - T \frac{d\mu}{da_s}$$

e le (1) diverranno

$$(1)' \quad \sum_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{dx_i}{da_s} = X_s - \frac{d\chi}{da_s} + T \frac{d\mu}{da_s}.$$

Anche nella (2) potremo sostituire a v il suo valore tratto dalla (8) in funzione di μ e di T , ossia di μ e di $\frac{d\chi}{dT}$. Così, nota χ in funzione di p e di μ , avremo solo da integrare le cinque equazioni (1)' (2) e (4) per determinare le cinque quantità x_1, x_2, x_3, μ e p in funzione di a_1, a_2, a_3 e t .

Alle (1)' può darsi anche la forma

$$(1)'' \quad \frac{d}{dt} \sum_i u_i \frac{dx_i}{da_s} = X_s - \frac{d\chi}{da_s} + \frac{1}{2} \frac{d}{da_s} \sum_i u_i^2 + T \frac{d\mu}{da_s}$$

ponendo

$$(13) \quad u_i = \frac{dx_i}{dt}.$$

Dalle (1)ⁿ si deduce

$$(14) \quad \frac{d}{dt} \sum_i \left(\frac{dx_i}{da_s} \frac{du_i}{da_{s+1}} - \frac{dx_i}{da_{s+1}} \frac{du_i}{da_s} \right) = \frac{dX_s}{da_{s+1}} - \frac{dX_{s+1}}{da_s} + \frac{d\mu}{da_s} \frac{dT}{da_{s+1}} - \frac{d\mu}{da_{s+1}} \frac{dT}{da_s} \\ s = 1, 2, 3.$$

Se le forze hanno una funzione potenziale V , la (1)ⁿ e la (14) divengono

$$(1)^n \quad \frac{d}{dt} \sum_i u_i \frac{dx_i}{da_s} = \frac{d(V - \chi + \frac{1}{2} \sum_i u_i^2)}{da_s} + T \frac{d\mu}{da_s} \quad s = 1, 2, 3$$

$$(15) \quad \frac{d}{dt} \sum_i \left(\frac{dx_i}{da_s} \frac{du_i}{da_{s+1}} - \frac{dx_i}{da_{s+1}} \frac{du_i}{da_s} \right) = \frac{d\mu}{da_s} \frac{dT}{da_{s+1}} - \frac{d\mu}{da_{s+1}} \frac{dT}{da_s}.$$

Se gli elementi del fluido non acquistano nè perdono calore sarà $Q = 0$, e quindi la (4) diverrà

$$\frac{d\mu}{dt} = 0$$

ossia

$$\mu = \mu_0,$$

denotando con μ_0 l'entropia specifica al principio del tempo.

Se W è una funzione di a_1, a_2, a_3 e t , e denotiamo con W' la derivata di W rispetto a t , dalle equazioni (15) si deduce

$$(16) \quad \frac{d}{dt} \sum_i \begin{vmatrix} \frac{dW}{da_1} & \frac{dx_i}{da_1} & \frac{du_i}{da_1} \\ \frac{dW}{da_2} & \frac{dx_i}{da_2} & \frac{du_i}{da_2} \\ \frac{dW}{da_3} & \frac{dx_i}{da_3} & \frac{du_i}{da_3} \end{vmatrix} = \sum_i \begin{vmatrix} \frac{dW'}{da_1} & \frac{dx_i}{da_1} & \frac{du_i}{da_1} \\ \frac{dW'}{da_2} & \frac{dx_i}{da_2} & \frac{du_i}{da_2} \\ \frac{dW'}{da_3} & \frac{dx_i}{da_3} & \frac{du_i}{da_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{dW}{da_1} & \frac{d\mu}{da_1} & \frac{dT}{da_1} \\ \frac{dW}{da_2} & \frac{d\mu}{da_2} & \frac{dT}{da_2} \\ \frac{dW}{da_3} & \frac{d\mu}{da_3} & \frac{dT}{da_3} \end{vmatrix}$$

Se dall'equazioni integrali

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3, t)$$

riguardiamo dedotte le a_i in funzione delle x_i e di t , rammentiamo la equazione (2) e poniamo

$$(17) \quad 2\xi_i = \frac{du_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{du_{i+2}}{dx_{i+1}},$$

$$(18) \quad \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} + \sum_i u_i \frac{d}{dx_i}$$

la equazione (16) diverrà

$$(19) \quad \frac{d}{dt} \sum_i v \xi_i \frac{dW}{dx_i} = \sum_i v \xi_i \frac{dW'}{dx_i} + \frac{v}{2} \begin{vmatrix} \frac{dW}{dx_1} & \frac{d\mu}{dx_1} & \frac{dT}{dx_1} \\ \frac{dW}{dx_2} & \frac{d\mu}{dx_2} & \frac{dT}{dx_2} \\ \frac{dW}{dx_3} & \frac{d\mu}{dx_3} & \frac{dT}{dx_3} \end{vmatrix}$$

Ponendo

$$W = x_1, x_2, x_3$$

si ottengono le tre equazioni

$$(20) \quad \frac{dv \xi_i}{dt} = \sum_s v \xi_s \frac{du_i}{dx_s} + \frac{v}{2} \frac{d\mu}{dp} \left(\frac{dp}{dx_{i+1}} \frac{dT}{dx_{i+2}} - \frac{dp}{dx_{i+2}} \frac{dT}{dx_{i+1}} \right), \quad i=1, 2, 3.$$

Se denotiamo con Δ il parametro differenziale di 1° ordine, con n_p , n_T ed n ordinatamente la normale alla superficie di ugual pressione (isobara) la normale alla superficie di ugual temperatura (isoterma) e la tangente alla intersezione della isobara e della isoterma per un punto (x_1, x_2, x_3) del fluido, le (20) prendono la forma

$$(21) \quad \frac{dv \xi_i}{dt} = \sum_s v \xi_s \frac{du_i}{dx_s} + \frac{v}{2} \frac{d\mu}{dp} \sqrt{\Delta_p \Delta_T} \operatorname{sen}(n_p, n_T) \cos(n x_i).$$

Se le isobare coincidono colle isoterme in tutto il tempo e in tutto il fluido, sarà

$$\operatorname{sen}(n_p, n_T) = 0,$$

e quindi

$$\frac{dv \xi_i}{dt} = \sum_s v \xi_s \frac{du_i}{dx_s} \quad i = 1, 2, 3$$

le quali hanno per integrali

$$v \xi_i = \sum_s A_s \frac{dx_i}{da_s}$$

essendo le A_s funzioni di a_1, a_2, a_3 indipendenti da t .

Se v_0, ξ_i^0 sono i valori di v e ξ_i per $t=0$, avremo

$$A_i = v_0 \xi_i^0$$

e quindi

$$v\xi_1 = \sum_r v_r \xi_r \frac{d\omega_1}{da_r}.$$

Siano:

$$a_1 = a_1(s_0)$$

l'equazioni di una *linea vortice* per $t=0$, e ω_0 la velocità di rotazione nel vortice; sarà

$$\xi_r = \omega_0 \frac{da_r}{ds_0}.$$

L'equazioni della linea, formata degli stessi elementi dopo il tempo t , saranno

$$x_r = x_r(s)$$

e le componenti del vortice saranno ξ_1, ξ_2, ξ_3 , e avremo

$$v\xi_1 = v_0 \omega_0 \frac{d\omega_1}{ds} \frac{ds}{ds_0}$$

onde il teorema trovato da *Helmholtz* per i fluidi incompressibili.

In un fluido elastico, sotto l'azione di forze che hanno una funzione potenziale, se le isobare coincidono sempre con le isoterme, gli elementi che formano un filetto vorticoso al principio del tempo formano un filetto vorticoso in tutto il tempo.

Ma per il principio della conservazione della massa, se denotiamo con $d\sigma$ l'area della sezione normale del filetto, abbiamo

$$v_0 d\sigma ds = v d\sigma_0 ds_0$$

onde

$$\omega d\sigma = \omega_0 d\sigma_0$$

e abbiamo l'altro teorema.

In un fluido elastico, sotto l'azione di forze che hanno una funzione potenziale, se le isobare coincidono sempre colle isoterme, un filetto vorticoso conserva uguale in tutto il tempo il prodotto della grandezza del vortice per la sua sezione normale.

Consideriamo ora il caso in cui gli elementi del fluido non acquistano nè perdono calore, avremo

$$Q = 0$$

50
e quindi

$$\mu' = 0$$

e la (19) diverrà ponendovi: $W = \mu$,

$$(22) \quad \frac{d}{dt} v \xi_i \frac{d\mu}{dx_i} = 0$$

e integrando

$$(23) \quad \sum_i v \xi_i \frac{d\mu}{dx_i} = \sum_i v_0 \xi_i^0 \frac{d\mu_0}{da_i}.$$

Se δv_0 è la lunghezza della normale alla superficie di entropia μ_0 , prolungata sino all'incontro colla superficie di entropia $\mu_0 + \delta \mu_0$, e δs_0 è la porzione dell'asse del vortice ϖ_0 , compresa tra le superficie μ_0 e $\mu_0 + \delta \mu_0$, sarà

$$(24) \quad v_0 \sum_i \xi_i^0 \frac{d\mu_0}{da_i} = v_0 \sqrt{\Delta \mu_0} \varpi_0 \cos(\delta v_0, \delta s_0) = \frac{v_0 \varpi_0 \cos(\delta v_0, \delta s_0)}{\delta v_0} \delta \mu_0.$$

Decomponendo il vortice (ξ_1, ξ_2, ξ_3) in due; uno coll'asse v normale alla superficie di entropia $\mu(x_1, x_2, x_3) = \mu_0(a_1, a_2, a_3)$, e uno coll'asse v , situato in questa superficie, e denotando con ϖ_v la grandezza del primo vortice con ϖ_μ la grandezza del secondo, avremo

$$\xi_i = \varpi_v \cos(v, x_i) + \varpi_\mu \cos(v_\mu, x_i)$$

e quindi

$$(25) \quad \sum_i v \xi_i \frac{d\mu}{dx_i} = v \sqrt{\Delta \mu} \varpi_v = \frac{v \varpi_v \delta \mu}{\delta v} = \frac{v \varpi_v \delta \mu_0}{\delta v}.$$

Sostituendo i valori (24) e (25) nella equazione (23), si otterrà

$$\frac{v \varpi_v}{\delta v} = \frac{v_0 \varpi_0}{\delta v_0} \cos(\delta v_0, \delta s_0)$$

e ponendo ugual massa per l'elemento, sarà

$$v_0 \delta v \delta \sigma = v \delta v_0 \delta \sigma_0$$

e quindi

$$\varpi_v d\sigma = \varpi_0 \cos(\delta v_0, \delta s) \delta \sigma_0.$$

Se chiamiamo *intensità* del vortice in un elemento il prodotto della grandezza del vortice per l'area della sezione dell'elemento, normale all'asse, avremo il seguente teorema

In un fluido elastico, sotto l'azione di forze che hanno una funzione potenziale, se ogni elemento non acquista nè perde calore, le intensità delle componenti dei vortici secondo le normali alle superficie di uguale entropia si conservano costanti in tutto il tempo.

Dunque se al principio del tempo sopra una superficie σ , di entropia costante e non esistono vortici, i vortici che potranno comparire nel seguito del tempo sopra la superficie σ formata dagli stessi elementi di fluido, nella quale la entropia avrà lo stesso valore e , avranno tutti gli assi situati sopra σ .

Un ugual risultato si ottiene se ogni elemento perde o acquista una quantità di calore proporzionale al tempo e alla temperatura assoluta. Infatti in questo caso sarà

$$\frac{dQ}{dt} = \pm \epsilon T$$

e quindi dalla (4) avremo

$$\frac{d\mu}{dt} = \pm E \epsilon ,$$

e la (19) diverrà anche in questo caso, ponendo $W = \mu$, poichè ϵ è una costante,

$$\frac{d}{dt} \sum v \xi_i \frac{d\mu}{dx_i} = 0 .$$



Nel secondo caso il rapporto domandato ($f' : f''$) sarà uguale a quello dei quadrati delle distanze corrispondenti ($d_1^2 : d_u^2$); poichè il polo d'energia f' produrrà alla distanza d_u uno spostamento x tale da aversi giusta la legge fondamentale

$$(2) \quad \frac{\phi}{x} = \frac{d_u^2}{d_1^2}$$

sicchè l'energia di tal polo alla distanza d_u sarà

$$(3) \quad x = \phi \frac{d_1^2}{d_u^2} ;$$

ma a questa stessa distanza lo spostamento prodotto da f'' è ϕ ; dunque dovrà essere

$$(4) \quad \frac{f'}{f''} = \frac{\phi \frac{d_1^2}{d_u^2}}{\phi} = \frac{d_1^2}{d_u^2} .$$

3. Usando del primo metodo esposto quì sopra, il Prof. Costa ed io abbiamo verificato che nel magnetizzare un ago per contatto è vantaggioso bensì il ripetere gli strofinii per avere la massima energia, ma ciò sino ad un certo limite, potendo avvenire che dopo aver raggiunto tal *maximum*, gli strofinii successivi dian luogo ad un decremento d'energia.

4. Con questo *Dinamometro magnetico* il Prof. Costa fa vedere facilmente, nelle sue lezioni, non aversi segno di affievolimento dell'azione magnetica per l'interposizione di lamine di legno, di vetro, di rame tra i due poli agenti, ma che il ferro mostra di farvi eccezione. Anzi su questo fenomeno il predetto Professore pubblicò alcune esperienze (1) sin dal 1873 ed in seguito vi studiarono i Sigg. Pisati e Scichilone; i quali non conoscevano il lavoro del Costa (2).

5. Varie ricerche ho impreso col *Dinamometro magnetico*, relative alla variazione che subisce il potere d'una calamita variando l'armatura; ed ho potuto determinare qualche condizione che

(1) Vedi la Mem. di lui sul *Dinamometro magnetico* nella *Scienza contemp.* sopra citata.

(2) Vedi le loro *Ricerche sperimentali sul magnetismo* nell' *App. alle Mem. degli spettrosc. ital.* (Vol. V. disp. 1.).

1

$$\begin{vmatrix} \frac{da}{ds} & \frac{db}{ds} & \frac{dc}{ds} \\ \frac{da}{dv} & \frac{db}{dv} & \frac{dc}{dv} \\ \frac{da}{dn} & \frac{db}{dn} & \frac{dc}{dn} \end{vmatrix}$$

ogni elemento è eguale al proprio determinante complementare. In virtù di questa proprietà, eliminando dall'eguaglianza (1) le derivate relative ad s e ponendo

$$(2) \quad \begin{aligned} u &= \frac{d\epsilon}{dc} - \frac{d\gamma}{db}, \quad v = \frac{d\gamma}{da} - \frac{dc}{dv}, \quad w = \frac{da}{db} - \frac{d\epsilon}{da}; \\ u &= \epsilon \frac{dc}{dn} - \gamma \frac{db}{dn}, \quad v = \gamma \frac{da}{dn} - \alpha \frac{dc}{dn}, \quad w = \alpha \frac{db}{dn} - \epsilon \frac{da}{dn}, \end{aligned}$$

la suddetta eguaglianza assume la forma

$$(2)_a \quad \int \left(u \frac{da}{dn} + v \frac{db}{dn} + w \frac{dc}{dn} \right) d\sigma = \int \left(u \frac{da}{dv} + v \frac{db}{dv} + w \frac{dc}{dv} \right) ds.$$

È sotto questa forma che essa serve molto opportunamente allo scopo attuale.

Sia infatti

$$(3) \quad M = \int \left(\frac{d \frac{1}{r}}{da} \alpha + \frac{d \frac{1}{r}}{db} \epsilon + \frac{d \frac{1}{r}}{dc} \gamma \right) dS$$

la funzione potenziale sul punto (x, y, z) di una distribuzione magnetica qualunque, occupante uno spazio S , di cui dS è un elemento di volume circostante al punto (a, b, c) , nel quale le componenti del momento magnetico (riferite all'unità di volume) sono α, ϵ, γ . Si è posto al solito

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

È noto che ponendo

$$(3)_a \quad \left\{ \begin{array}{l} U = \int \left(\frac{d}{db} \frac{1}{r} \gamma - \frac{d}{dc} \frac{1}{r} \epsilon \right) dS, \\ V = \int \left(\frac{d}{dc} \frac{1}{r} \alpha - \frac{d}{da} \frac{1}{r} \gamma \right) dS, \\ W = \int \left(\frac{d}{da} \frac{1}{r} \epsilon - \frac{d}{db} \frac{1}{r} \alpha \right) dS. \end{array} \right.$$

si hanno le identità

$$(3)_b \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} = 4\pi\alpha - \frac{dM}{dx}, \\ \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} = 4\pi\epsilon - \frac{dM}{dy}, \\ \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} = 4\pi\gamma - \frac{dM}{dz}, \end{array} \right.$$

nelle quali le α, ϵ, γ si riferiscono al punto (x, y, z) e sono quindi nulle se questo punto è esterno allo spazio S . Ora applicando la trasformazione di Poisson alle tre funzioni U, V, W si trova (2)

$$(4) \quad U = \int \frac{u dS}{r} + \int \frac{\mathbf{u} d\sigma}{r}, \quad V = \int \frac{v dS}{r} + \int \frac{\mathbf{v} d\sigma}{r}, \quad W = \int \frac{w dS}{r} + \int \frac{\mathbf{w} d\sigma}{r}$$

e queste espressioni costituiscono, in virtù delle formole fondamentali dell'elettromagnetismo, ciò che Lipschitz molto opportunamente denomina il *sistema potenziale* d'una distribuzione galvanica mista (di spazio e di superficie), la quale, come ora si vedrà, è formata di correnti *costanti* e *chiuse*.

Questa distribuzione si compone infatti di due, l'una di spazio l'altra di superficie, coi caratteri seguenti:

1° Per le correnti che esistono nello spazio S , le componenti dell'intensità specifica sono le quantità u, v, w date dalla prima terna di equazioni (2). Da questa terna risulta che in ogni punto di S , si ha

$$(5) \quad \frac{du}{da} + \frac{dv}{db} + \frac{dw}{dc} = 0.$$

$$u = \frac{d\epsilon}{dc} - \frac{d\gamma}{db}, \quad v = \frac{d\gamma}{da} - \frac{d\alpha}{dc}, \quad w = \frac{d\alpha}{db} - \frac{d\epsilon}{da},$$

(8)_a

$$u \frac{da}{dv} + v \frac{db}{dv} + w \frac{dc}{dv} + \alpha \frac{da}{ds} + \epsilon \frac{db}{ds} + \gamma \frac{dc}{ds} = 0,$$

delle quali le prime tre devono sussistere in ogni punto dello spazio S e la quarta in ogni punto della superficie σ e per ogni coppia di direzioni ortogonali s, v disposte in modo da formare con n una terna positiva (s, v, n) . Questa quarta equazione tien luogo delle tre ultime equazioni (2), perchè eliminandone (1)_a le derivate relative ad s si ottiene da essa un'altra equazione la quale, dovendo sussistere per *tutte* le direzioni v normali ad n , si decompone di nuovo necessariamente, tenuto conto della seconda condizione (8), nelle suddette tre equazioni.

È bene considerare dapprima un caso particolarissimo, quello, cioè, in cui si abbia

$$u = v = w = 0, \quad \text{in } S$$

$$u = v = w = 0, \quad \text{in } \sigma.$$

In questo caso le equazioni (8)_a danno

$$\alpha = \frac{d\phi}{da}, \quad \epsilon = \frac{d\phi}{db}, \quad \gamma = \frac{d\phi}{dc}, \quad \text{in } S$$

$$d\phi = 0, \quad \text{in } \sigma$$

e queste formole definiscono una distribuzione lamellare *chiusa*, cioè una distribuzione lamellare in cui le superficie terminali del magnete sono pur esse superficie lamellari. La funzione ϕ che individua tale distribuzione è vincolata soltanto alle condizioni di avere le derivate prime monodrome, continue e finite in tutto lo spazio S e di assumere valori costanti sulle superficie terminali di questo spazio. Si sa effettivamente che ogni distribuzione lamellare chiusa è priva di azione sui punti dello spazio non occupato da essa.

(Continua)

glia determinare la grossezza più opportuna del nastro metallico, per ottenere la massima forza magnetizzante e quindi il massimo momento magnetico. Variando la sola grossezza del nastro metallico, riterremo come variabile la quantità g . Il volume della intera spirale sarà dato da

$$V = g h l$$

ed il momento magnetico da

$$M = \frac{c s E}{R g + \frac{l \rho g}{(g - \gamma) h}}.$$

V dovendo rimanere costante, dovrà essere

$$\frac{d l}{d g} = - \frac{l}{g}$$

ed M dovendo essere un massimo,

$$\frac{r}{R} = \frac{g - \gamma}{g}$$

cioè per ottenere il massimo momento magnetico si deve dare al nastro metallico tal grossezza che la resistenza dell'elica con esso costruita stia alla resistenza esterna come la grossezza del nastro metallico nudo sta alla grossezza del nastro e del suo strato isolante assieme.

Supposti dati e quindi costanti tutti gli altri elementi di un elettromagnete, prendiamo come arbitrario s , lo spessore dell'elica magnetizzante e cerchiamo fino a qual punto si possa accrescere, vale a dire fino a qual limite si possa avvolgere vantaggiosamente il nastro metallico attorno al nucleo, ovvero sia aumentare la lunghezza l senza che la maggiore resistenza che con essa si introduce, giunga ad indebolire l'azione della corrente. Eguagliando perciò a zero la derivata di

$$M = \frac{c E s a}{R g a + 2 \pi (d + s) s \rho}$$

presa rapporto ad s si ottiene facilmente

$$(a) \quad \frac{r}{R} = \frac{d + s}{s}$$

*cioè il numero delle spire dell' elica può essere aumentato fin-
tantochè la sua resistenza sta alla resistenza esterna, come il
diametro del nucleo accresciuto dello spessore della spirale sta
allo spessore della sola spirale.*

Occupiamoci ora delle dimensioni del nucleo magnetico ed
in primo luogo vediamo fino a qual limite si possa crescere con
utilità il suo diametro. Dalla legge di Müller risulta che il mo-
mento magnetico di un elettromagnete è proporzionale alla ra-
dice quadrata del diametro del suo nucleo. quindi

$$M = \frac{c \cdot d^{\frac{1}{2}} E}{\alpha \frac{2\pi(d+s) s \rho}{g a}}$$

dove α è una tal quantità che il denominatore αr rappresenta la
resistenza totale del circuito esterno e dell' elettromagnete, qua-
lora si verifichino le condizioni di massimo secondo la legge or
ora trovata. Derivando tale espressione rispetto a d come varia-
bile ed uguagliandola a zero, si ottiene

$$d = s$$

*cioè un' elettrocalamita si trova nelle condizioni più favorevoli
rispetto alle sue dimensioni, quando il diametro del suo nucleo
eguaglia lo spessore della spirale magnetizzante.*

In base a questa deduzione la (α) si cambia nella

$$r = 2R$$

*cioè il migliore effetto si ottiene quando la resistenza della spi-
rale magnetizzante è doppia di quella del circuito esterno.*

Per la stessa conclusione le espressioni di n, l, r , diventano

$$n = \frac{2d}{g}, \quad l = \frac{4\pi d^2}{g}, \quad r = \frac{4\pi d^2 \rho}{ga}.$$

La condizione di massimo rispetto alla lunghezza si deter-
mina in base alla legge di Müller che stabilisce che le forze at-
trattive sono proporzionali alla radice quadrata della lunghezza.
Per giungere però ad una deduzione facilmente interpretabile fa
d'uopo esprimere la lunghezza del nucleo in funzione del suo
diametro. Se allora si pone

$$h = \epsilon d$$

dove ε è una costante da determinarsi,

$$(b) \quad A = c I^2 d \sqrt{d}$$

dovendo rappresentare per la legge di Müller la forza attrattiva (la costante c contenendo anche il fattore $\sqrt{\varepsilon}$), eguagliando a zero la derivata rapporto a d della stessa espressione alla quale si può dare la forma

$$A = \frac{c E^2 d^{\frac{3}{2}}}{\left[R + \frac{4 \pi d \rho}{\varepsilon g (g - \gamma)} \right]^2}$$

si trova tosto

$$\varepsilon = \frac{3 r_1}{R}$$

essendo

$$r_1 = \frac{2 \pi \rho d}{g (g - \gamma)}$$

cioè rappresentando r_1 la resistenza dell'elica che coprirebbe un nucleo di lunghezza eguale al proprio diametro. Ma siccome $\frac{r}{R}$ dovrebbe essere eguale a 2, così sarà $\varepsilon = 6$ e quindi $h = 6d$, vale a dire *un elettromagnete si trova nelle migliori condizioni, quando la lunghezza d'ogni branca del suo nucleo è eguale a sei volte il suo diametro.*

Riassumendo dunque quanto finora è stato dedotto, considerando un elettromagnete in quelle condizioni per le quali siano soddisfatte le leggi di Lenz e Jacobi, si ottiene la massima magnetizzazione quando la lunghezza d'ogni branca equivale a sei volte il suo diametro, lo spessore dell'elica magnetizzante è eguale al diametro stesso del nucleo e la resistenza totale della spirale è doppia di quella del circuito esterno: condizioni queste che valgono anche per il caso degli elettromagneti ordinari, come facilmente si trova collo stesso calcolo (1).

(1) Vedasi Th. Du Moncel, *Détermination des éléments de constructions des électro-aimants*. Paris, 1882.

spirali di nastro di sottil foglia di rame, anzichè di filo, e come strato isolante serva un secondo nastro di carta di seta.

Bisognerà anzitutto calcolare in base alle formule esposte antecedentemente la grossezza del nastro e la sua lunghezza, in modo che rendendolo tale da soddisfare alle condizioni da quelle stabilite, la sua resistenza totale sia di 0,57 Ohm. Partendo dunque dalla condizione posta dal Du Moncel, che la resistenza delle due spirali deve eguagliare quella del circuito esterno, la formula che servirà al nostro caso sarà la

$$r = 0,57$$

ovvero sia

$$\frac{4\pi d^2 \rho}{g'(g' - \gamma)h} = 0,57$$

nella quale g' rappresenta la incognita grossezza del nastro, e sostituendo in essa ad h il suo valore $6d$ si ha

$$\frac{2}{3} \frac{\pi d \rho}{g'(g' - \gamma)} = 0,57.$$

Risolvendo questa equazione di secondo grado in g' si ottiene la cercata grossezza. Il γ come è bene evidente è sempre quantità nota; e sostituendo ad esso per questo caso particolare il valore mm. 0,038 quale ottenni dalla misura del nastro di carta di seta da me impiegato nella costruzione di vari elettromagneti e a π , d , ρ i loro valori, si ha facilmente

$$g' = \text{mm. } 0,079$$

o più approssimativamente

$$g' = \text{mm. } 0,08.$$

Ricorrendo allora alla formula

$$n' = \frac{2d}{g'}$$

che ci dà il numero totale delle spire, si ha

$$n' = 1060$$

e dalla

$$l' = \frac{4 \pi d^2}{g'}$$

$$l' = m. 278,25 .$$

Rammentando ora che la forza attrattiva $A = 23,112$ k. venne calcolata in base alla formula

$$A = C. n d^{\frac{3}{2}}$$

potremo stabilire la proporzione

$$\frac{A}{A'} = \frac{n}{n'}$$

dalla quale si ricava tosto

$$A' = 31,895 \text{ k.}$$

Dunque lo stesso nucleo, nel caso in cui è avvolto dalle spirali costituite da nastro in luogo che da filo di rame, mostrerà una forza portativa assai più grande, e più precisamente una forza portativa che starà alla prima come 1,38 a 1.

Con alcune esperienze fatte da qualche tempo cercai di costruire degli elettromagneti posti nelle identiche condizioni di altri fabbricati col solito metodo, e come era ben naturale, ottenni sempre risultati concordanti. Nelle mie prove ho impiegati successivamente nastri di stagnola e nastri di tombacco (1), servendomi per isolatore di un nastro di carta di seta esilissima, quale è quella ordinariamente impiegata nella manifattura di fiori artificiali. Elettromagneti fatti con foglia di stagnuola verniciata, mi diedero risultati eguali a quelli di elettro-magneti identici fatti con lamina di stagnuola e nastro di carta; nel caso che impiegava stagnuola verniciata occorreva avere l'avvertenza di coprire di paraffina gli orli del nastro: colla carta invece i contatti laterali fra spira e spira si evitano tenendo il nastro di carta alquanto più alto del nastro metallico.

(1) Il tombacco, detto volgarmente orpello, è una lega che può avere le seguenti composizioni: tombacco giallo; Cu 88,88, Zn 5,56, Sn 5,56 — tombacco dell'Oker: ottone formato da 85 parti di Cu e 15 di Zn — La foglia di tombacco da me adoperata sottoposta all'analisi chimica non mostrò contenere traccia di stagno.

furono poi costruite nelle officine dei signori Siemens da Sapey, e diedero risultati, come era da prevedere, assai vantaggiosi. Solo oso fare una osservazione. Nei due brevissimi cenni dati dal citato giornale, si dice che i vantaggi offerti dalla nuova disposizione di elettromagnete apparirono dal confronto di eliche di egual peso. Come risulta però anche dal calcolo, si deve intendere facilmente come il vantaggio sarà manifesto quando si confronteranno gli effetti di due eliche magnetizzanti di egual volume (una a spire piate e l'altra della forma ordinaria) e non di egual peso. La nuova disposizione deve servire appunto a poter ammassare in eguale volume maggior quantità di metallo sotto forma di spirale, e quindi nel poter aumentare il numero dei giri dell'elica, conservando inalterata la resistenza voluta dalle condizioni di massimo per i singoli casi.

Torino, aprile 1883.



SULL'EQUIVALENZA DELLE DISTRIBUZIONI MAGNETICHE E GALVANICHE;
NOTA DEL PROF. E. BELTRAMI. (1)

Segue da ciò che se esiste una distribuzione magnetica equivalente alla galvanica data, ne esistono necessariamente infinite altre, che si ottengono da quella sovrapponendo ad essa una distribuzione lamellare chiusa. Reciprocamente, due distribuzioni magnetiche, equivalenti ad una stessa distribuzione galvanica, non possono differire che per una distribuzione lamellare chiusa.

Prima di cercare se esista una distribuzione magnetica equivalente alla galvanica data $(u, v, w; u, v, w)$, è necessario di stabilire alcune proposizioni.

(1) *Continuazione e fine.* Vedi pag. 89.

Si circoscriva sulla superficie σ una regione semplicemente connessa e se ne riferiscano i punti ad un sistema di coordinate curvilinee p e q sotto la sola condizione che le linee coordinate formino in quella regione un reticolo *ordinario*, cioè un reticolo suscettibile d'essere trasformato con continuità in un reticolo cartesiano. Supposto che per tali coordinate il quadrato dell'elemento lineare generico prenda la forma

$$ds^2 = E dp^2 + 2 F dp dq + G dq^2$$

e designando con $\omega_p \sqrt{E}$, $\omega_q \sqrt{G}$ le componenti dell'intensità cificia superficiale secondo le linee coordinate, nei sensi in cui crescono i parametri p e q rispettivamente, si ha

$$(9) \quad \begin{cases} u = \omega_p \frac{da}{dp} + \omega_q \frac{da}{dq} , \\ v = \omega_p \frac{db}{dp} + \omega_q \frac{db}{dq} , \\ w = \omega_p \frac{dc}{dp} + \omega_q \frac{dc}{dq} \end{cases}$$

e quindi

$$(9)_a \quad u \frac{da}{dv} + v \frac{db}{dv} + w \frac{dc}{dv} = \left(E \frac{dp}{dv} + F \frac{dq}{dv} \right) \omega_p + \left(F \frac{dp}{dv} + G \frac{dq}{dv} \right) \omega_q$$

Si ha pure, qualunque sia la funzione ψ ,

$$u \frac{d\psi}{da} + v \frac{d\psi}{db} + w \frac{d\psi}{dc} = \omega_p \frac{d\psi}{dp} + \omega_q \frac{d\psi}{dq} ,$$

ovvero

$$(9)_b \quad u \frac{d\psi}{da} + v \frac{d\psi}{db} + w \frac{d\psi}{dc} = \frac{1}{H} \left\{ \frac{d(H\psi\omega_p)}{dp} + \frac{d(H\psi\omega_q)}{dq} \right\} -$$

dove

$$[\omega] = \frac{1}{H} \left\{ \frac{d(H\omega_p)}{dp} + \frac{d(H\omega_q)}{dq} \right\}, \quad H = \sqrt{EG - F^2}.$$

Ora dalle note formule (cfr. la mia Memoria *Sulle variabili complesse in una superficie qualunque*, Annali di Matematica Serie II, T. I, 1867)

dove ϕ è una funzione la quale, oltre ad avere le derivate prime monodrome, continue e finite in S , deve soddisfare alla quarta equazione (8)_a, cioè ad un'equazione di superficie. Ora facendo tendere le a, b, c , nelle equazioni (12), verso i valori relativi ad un punto della superficie, le componenti X, Y, Z tendono verso i valori limiti X_n, Y_n, Z_n , che spettano a queste componenti in quel punto, dalla parte *interna* della superficie, valori generalmente diversi da quelli, che si possono indicare con X_n', Y_n', Z_n' , che spettano alle stesse componenti in quel medesimo punto, dalla parte *esterna*. La quarta equazione (8)_a diventa per tal modo

$$(12)_a \quad d\phi + \left\{ X_n \frac{da}{ds} + Y_n \frac{db}{ds} + Z_n \frac{dc}{ds} + 4\pi \left(u \frac{da}{dv} + v \frac{db}{dv} + w \frac{dc}{dv} \right) \right\} ds = 0,$$

dove $d\phi$ è l'incremento che riceve ϕ lungo l'elemento lineare qualunque ds della superficie σ . Ma dalle note formole relative alle discontinuità delle derivate prime di funzioni potenziali di superficie (cfr. la mia Nota *Intorno ad alcuni nuovi teoremi del* sig. C. Neumann, *Annali di Matematica*, Serie II, t. X), si ha

$$(12)_b \quad \begin{cases} X_n - X_n' + 4\pi \left(v \frac{dc}{dn} - w \frac{db}{dn} \right) = 0, \\ Y_n - Y_n' + 4\pi \left(w \frac{da}{dn} - u \frac{dc}{dn} \right) = 0, \\ Z_n - Z_n' + 4\pi \left(u \frac{db}{dn} - v \frac{da}{dn} \right) = 0, \end{cases}$$

donde (1)_a

$$\begin{aligned} & (X_n - X_n') \frac{da}{ds} + (Y_n - Y_n') \frac{db}{ds} + (Z_n - Z_n') \frac{dc}{ds} \\ & + 4\pi \left(u \frac{da}{dv} + v \frac{db}{dv} + w \frac{dc}{dv} \right) = 0. \end{aligned}$$

L'equazione (12)_a può dunque essere sostituita dalla seguente

$$d\phi + X_n' da + Y_n' db + Z_n' dc = 0,$$

ossia (11)_a dalla

$$d(\phi - \Phi) = 0.$$

Ne consegue che la funzione ϕ , astrazione fatta da differenze costanti

$$(12)_c \quad \phi - \Phi = C$$

Facciamo subito osservare come, per avere una fiamma a gas d'eguale intensità di quella della nostra lampada Carcel normale, quando consuma 42 gr. di olio di colza, è stato necessario un consumo di litri 156,8 di gas all'ora col nostro becco Bengel a 40 fori e con cono. Audoin e Berard (loc. cit.) sperimentando sopra un gas di ricchezza media, ottenuto da carboni del Belgio, hanno per un becco dello stesso genere trovato necessario un consumo di 160 litri per avere una fiamma d'intensità eguale a quella della Carcel tipo. Vediamo dunque come il nostro numero differisce assai poco da questo, avuto riguardo alle differenze che possono presentare nel potere illuminante i gas-luce di diversa provenienza. Il gas da noi adoperato è quello fornito dalla Società Italiana del gas di Torino.

Si deduce poi dai valori ottenuti come il potere illuminante dell'olio di ravizzone è superiore a quello dell'olio d'oliva, ed essi stanno fra di loro nel rapporto di

$$\frac{0,915}{0,825} = 1,11.$$

Se noi riferiamo il potere illuminante a parità di spesa otteniamo il prezzo della luce dei due olii. Poniamo il prezzo medio dell'olio di ravizzone a lire 1,30 al k., di quello di oliva da ardere a lire 1,50 al k. Per un consumo di 42 gr. all'ora abbiamo che la spesa dell'illuminazione è per l'olio di ravizzone di centesimi

$$\frac{130 \times 42}{1000} = 5,5,$$

per l'olio di oliva di centesimi

$$\frac{150 \times 42}{1000} = 6,3.$$

Per avere la spesa di illuminazione a parità di luce, cioè il prezzo della luce, si dividono semplicemente quei valori per i poteri illuminanti e si avrà per l'olio di ravizzone

$$\frac{5,5}{0,915} = 6,0$$

due opposte normali dell'elemento $d\sigma$ ed U_n , U_n' sono i valori di U sulle due corrispondenti faccie di questo elemento (così V_n e V_n').

Distinguendo le due parti, σ_u , e σ_v , di σ ed ammettendo che le superficie di discontinuità per una delle due funzioni U, V non sieno tali, per le derivate dell'altra, ossia che uno strato semplice dell'una distribuzione non coincida con uno strato doppio dell'altra, si trova

$$\begin{aligned} & \int \Delta_1(U, V) dS \\ &= - \int U \Delta_1 V dS_v - \int U \left(\frac{dV}{dn} + \frac{dV}{dn'} \right) d\sigma_v - \int (U_n - U_n') \frac{dV}{dn} d\sigma_u \\ &= - \int V \Delta_1 U dS_u - \int V \left(\frac{dU}{dn} + \frac{dU}{dn'} \right) d\sigma_u - \int (V_n - V_n') \frac{dU}{dn} d\sigma_v. \end{aligned}$$

Ma dal teorema di Green, tenendo conto delle condizioni ammesse per le due funzioni U, V , rese ora monodrome, si traggono le espressioni

$$(2) \quad U = \int \frac{k_u dS_u}{r} + \int \frac{h_u d\sigma_u}{r} + \int g_u \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma_u,$$

$$V = \int \frac{k_v dS_v}{r} + \int \frac{h_v d\sigma_v}{r} + \int g_v \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma_v$$

dove

$$(2)_a \quad \begin{aligned} \Delta_1 U &= -4\pi k_u, \quad \frac{dU}{dn} + \frac{dU}{dn'} = -4\pi h_u, \quad U_n - U_n' = 4\pi g_u, \\ \Delta_1 V &= -4\pi k_v, \quad \frac{dV}{dn} + \frac{dV}{dn'} = -4\pi h_v, \quad V_n - V_n' = 4\pi g_v; \end{aligned}$$

si ha dunque finalmente

$$\begin{aligned} (3) \quad W_{uv} &= \frac{1}{4\pi} \int \Delta_1(U, V) dS \\ &= \int U k_v dS_v + \int U h_v d\sigma_v - \int \frac{dU}{dn} g_u d\sigma_u \\ &= \int V k_u dS_u + \int V h_u d\sigma_u - \int \frac{dV}{dn} g_v d\sigma_v, \end{aligned}$$

epperò anche

$$(3)_a \quad \begin{aligned} & \int U k_v dS_v + \int U h_v d\sigma_v + \int \frac{dU}{dn} g_v d\sigma_v \\ & = \int V k_u dS_u + \int V h_u d\sigma_u + \int \frac{dV}{dn} g_u d\sigma_u \end{aligned}$$

Si possono ora considerare i diversi casi possibili.

Supponiamo dapprima che si abbia

$$g_u = g_v = 0,$$

cioè che amendue le distribuzioni sieno *ordinarie*. In tale ipotesi i due ultimi membri delle eguaglianze (3) sono espressioni notoriamente equivalenti del potenziale mutuo, che diremo P_o , di queste due distribuzioni. Questo potenziale è quindi espresso anche da

$$(4) \quad P_o = \frac{1}{4\pi} \int \Delta_1 (U, V) dS,$$

ed in ciò consiste la proposizione ben nota, rammentata al principio.

Supponiamo, in secondo luogo, che si abbia

$$h_u = k_u = h_v = k_v = 0.$$

cioè che amendue le distribuzioni sieno di *doppio strato*. In tale ipotesi i due ultimi membri delle eguaglianze (3), *cambiati di segno*, sono espressioni equivalenti del potenziale mutuo, che diremo P_i , di queste due distribuzioni. Questo potenziale è quindi espresso anche da

$$(4)_a \quad P_i = -\frac{1}{4\pi} \int \Delta_1 (U, V) dS,$$

talchè questo potenziale ammette la stessa espressione che nel caso precedente, ma col segno cambiato.

Supponiamo, in terzo luogo, che una delle distribuzioni, per esempio la prima, sia ordinaria e la seconda non costi che di doppi strati, cosicchè si abbia

$$g_u = h_v = k_v = 0.$$

In tale ipotesi le eguaglianze (3) danno

$$(4)_b \quad \int \Delta_1 (U, V) dS = 0,$$

equazione la quale mostra che il potenziale mutuo di due distribuzioni di specie diversa *non* è esprimibile sotto la forma (1). Dalle stesse eguaglianze (3) segue anche, nel caso ora considerato, la relazione

$$(4)_c \quad \int V k_u dS_u + \int V h_u d\sigma_u - \int \frac{dU}{dn} g_v d\sigma_v = 0,$$

che verrà interpretata più sotto.

Passiamo finalmente al caso generale, a quello, cioè, di due distribuzioni *complesse*. Decomponiamo la funzione U in due parti

$$U = U_0 + U_1,$$

delle quali la prima corrisponda alla distribuzione ordinaria (h_u, k_u), la seconda a quella di doppio strato (g_u). Si ha allora (3)

$$\begin{aligned} W_{uv} = & \int U_0 k_v dS_v + \int U_0 h_v d\sigma_v \\ & + \int U_1 k_v dS_v + \int U_1 h_v d\sigma_v - \int \frac{dV}{dn} g_u d\sigma_u. \end{aligned}$$

Ma la relazione (3)_a, applicata alle due funzioni U_1, V , dà

$$\int U_1 k_v dS_v + \int U_1 h_v d\sigma_v + \int \frac{dU_1}{dn} g_v d\sigma_v = \int \frac{dV}{dn} g_u d\sigma_u:$$

quindi si può scrivere

$$W_{uv} = \left\{ \int U_0 k_v dS_v + \int U_0 h_v d\sigma_v \right\} - \left\{ \int \frac{dU_1}{dn} g_v d\sigma_v \right\}.$$

Ora la prima espressione fra parentesi è il potenziale mutuo, P_0 , delle sole parti ordinarie delle due distribuzioni, la seconda è il potenziale mutuo, P_1 , dei soli doppi strati ad esse appartenenti: si ha dunque

$$(4)_d \quad \frac{1}{4\pi} \int \Delta_1 (U, V) dS = P_0 - P_1,$$

vale a dire che, quando le due distribuzioni sono complesse, l'espressione (1) non rappresenta più il potenziale mutuo, nè col proprio segno, nè col segno cambiato, ma bensì la *differenza* dei potenziali mutui delle parti omonime delle due distribuzioni.

Questa proprietà è del resto una conseguenza necessaria delle precedenti; giacchè, ponendo

$$U = U_0 + U_1, \quad V = V_0 + V_1,$$

si ha

$$\begin{aligned} \Delta_1(U, V) &= \Delta_1(U_0, V_0) + \Delta_1(U_1, V_1) \\ &\quad + \Delta_1(U_0, V_1) + \Delta_1(U_1, V_0), \end{aligned}$$

ed essendo, per le equazioni (4)_b, (4), (4)_a,

$$\begin{aligned} \int \Delta_1(U_0, V_1) dS &= 0, & \int \Delta_1(U_1, V_0) dS &= 0, \\ \int \Delta_1(U_0, V_0) dS &= 4\pi P_0, & \int \Delta_1(U_1, V_1) dS &= -4\pi P_1, \end{aligned}$$

si ricade appunto sulla relazione (4)_a

Giova osservare che se, conservando ad $U_0, U_1, V_0, V_1, P_0, P_1$ i significati precedenti, si ponesse invece $U = U_0 + iU_1, V = V_0 + iV_1$, si otterrebbe

$$\frac{1}{4\pi} \int \Delta_1(U, V) dS = P_0 + P_1.$$

Quando le due distribuzioni sono di specie diversa, il potenziale mutuo non ammette una definizione generale; questa definizione esiste quando la distribuzione ordinaria di spazio e di superficie è quella che rappresenta, rispetto ai punti esterni, un corpo magnetico. Designamo con α, β, γ le componenti del momento magnetico, riferito all'unità di volume, in un punto qualunque (a, b, c) dello spazio S_u occupato dal corpo magnetico, talchè si abbia

$$(5) \quad U = \int \left(\frac{d}{da} \frac{1}{r} \alpha + \frac{d}{db} \frac{1}{r} \beta + \frac{d}{dc} \frac{1}{r} \gamma \right) dS_u$$

e quindi

$$k_u = - \left(\frac{d\alpha}{da} + \frac{d\epsilon}{db} + \frac{d\gamma}{dc} \right)$$

$$h_u = - \left(\alpha \frac{da}{dn} + \epsilon \frac{db}{dn} + \gamma \frac{dc}{dn} \right)$$

In questo caso la superficie σ_u è necessariamente quella che limita lo spazio S_u o, più esattamente, quella che separa le singole regioni dello spazio in cui le funzioni α, ϵ, γ sono continue. Ponendo

$$(5)_a \quad V = \int g_v \frac{d}{dn} \frac{1}{r} d\sigma_v$$

ed ammettendo che la superficie σ_v possa bensì attraversare lo spazio S_u , ma che le vere correnti di cui V è la funzione potenziale restino al di fuori di questo spazio, si deduce dall'equazione (4)_c, per note trasformazioni (con riguardo all'eventuale discontinuità di V entro S_u ed alla corrispondente equazione (2)_a),

$$(5)_b \quad \int \left(\frac{dV}{da} \alpha + \frac{dV}{db} \epsilon + \frac{dV}{dc} \gamma \right) dS_u \\ - \int \frac{dU}{dn} g_v d\sigma_v - 4 \pi \int g_v \left(\alpha \frac{da}{dn} + \epsilon \frac{db}{dn} + \gamma \frac{dc}{dn} \right) d\sigma_v .$$

Quest'equazione esprime, nel caso ora considerato, il teorema di reciprocità che sussiste per ogni potenziale mutuo, e rende ragione del doppio modo in cui può essere calcolato il potenziale del magnete sul doppio strato. Così Kirchhoff, in una questione particolare ove interviene questa determinazione (*Zur Theorie des in einem Eisenkörper inducirten Magnetismus* (1870), pag. 226 delle *Gesammelte Abhandlungen*) si vale della prima espressione: all'incontro Roiti, in un'altra questione, analiticamente identica (*Dell'azione elettromotrice dei solenoidi neutri* (1874) nel *Nuovo Cimento*), si vale, implicitamente, della seconda. Le due espressioni non si possono, in generale, trasformare l'una nell'altra se non tenendo conto della relazione (4)_b. Nel caso particolare considerato dai due citati Autori questa relazione diventa, accidentalmente, un'identità, per essere $U = 0$.

Le proposizioni precedenti possono essere presentate sotto una forma più generale.

Consideriamo due sistemi, ciascun dei quali comprenda distribuzioni ordinarie (di spazio e di superficie) e distribuzioni galvaniche stazionarie e chiuse (pure di spazio e di superficie), colla sola restrizione che queste distribuzioni sieno tutte nel finito. Designiamo con X, Y, Z le componenti della forza totale (ordinaria ed elettromagnetica) esercitata dal primo sistema sul punto (x, y, z) e poniamo

$$(6) \quad \begin{cases} X = -\frac{dT}{dx} + \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy}, \\ Y = -\frac{dT}{dy} + \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz}, \\ Z = -\frac{dT}{dz} + \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx}, \end{cases}$$

dove T, U, V, W sono quattro funzioni potenziali della forma

$$\begin{aligned} T &= \int \frac{t dS_0}{r} + \int \frac{\mathbf{t} d\sigma_0}{r} \\ U &= \int \frac{u dS_1}{r} + \int \frac{\mathbf{u} d\sigma_1}{r}, \quad V = \int \frac{v dS_1}{r} + \int \frac{\mathbf{v} d\sigma_1}{r}, \\ W &= \int \frac{w dS_1}{r} + \int \frac{\mathbf{w} d\sigma_1}{r}, \end{aligned}$$

le tre ultime delle quali soddisfanno in ogni punto dello spazio alla nota relazione

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0.$$

Le quantità analoghe del secondo sistema sieno designate colle stesse lettere, accentate.

Tenendo conto di tutte le relazioni (di spazio e di superficie) cui soddisfanno le funzioni

$$T, U, V, W; t, u, v, w; \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$$

(cfr. la mia precedente Nota *Sull'equivalenza delle distribuzioni magnetiche e galvaniche*) e delle analoghe relative al secondo sistema, si trova

$$\begin{aligned}
 (6)_a \quad & \frac{1}{4\pi} \int (X X' + Y Y' + Z Z') dS \\
 &= \int T t' dS' + \int T t' d\sigma' + \int (U u' + V v' + W w') dS' \\
 & \quad + \int (U u' + V v' + W w') d\sigma', \\
 &= \int T' t dS + \int T' t d\sigma + \int (U' u + V' v + W' w) dS \\
 & \quad + \int (U' u + V' v + W' w) d\sigma,
 \end{aligned}$$

Ora, conservando a P_0 , P_1 i significati precedenti, si ha

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \int T t' dS' + \int T t' d\sigma' \\
 &= \int T' t dS + \int T' t d\sigma,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_1 &= - \int (U u' + V v' + W w') dS' - \int (U u' + V v' + W w') d\sigma' \\
 &= - \int (U' u + V' v + W' w) dS - \int (U' u + V' v + W' w) d\sigma;
 \end{aligned}$$

si ottiene quindi $(6)_a$, come nel caso già considerato prima $(4)_a$,

$$(6)_b \quad \frac{1}{4\pi} \int (X X' + Y Y' + Z Z') dS = P_0 - P_1$$

In particolare, quando i due sistemi sono di specie diversa, per esempio quando

$$U = V = W = T' = 0,$$

si trova

$$(6)_c \quad \int (X X' + Y Y' + Z Z') dS = 0,$$

relazione in cui rientra la $(4)_b$.

Per interpretare ed applicare rettamente queste diverse relazioni, non bisogna dimenticare che le quantità X, Y, Z sono definite dalle equazioni (6), epperò non sono sempre identificabili

in senso assoluto, colle componenti della forza. È noto, per esempio, che nell'interno di un magnete la forza magnetica non ammette una definizione assoluta, come nei punti esterni. Ciò nonostante la formola (6)_a può essere applicata, con opportuni artifici, anche ai corpi magnetici.

Supponiamo, per esempio, che si tratti dell'azione mutua d'un magnete e di un sistema di correnti. Sia M la funzione potenziale del magnete, (U', V', W') il sistema potenziale delle correnti (U, V, W) il sistema potenziale della distribuzione galvanica equivalente, in azione esterna, al magnete. Si ha, come è noto,

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} &= 4\pi\alpha - \frac{dM}{dx}, \\ \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} &= 4\pi\beta - \frac{dM}{dy}, \\ \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} &= 4\pi\gamma - \frac{dM}{dz}\end{aligned}$$

dove $\alpha = \beta = \gamma = 0$ se il punto (x, y, z) è esterno allo spazio S_0 occupato dal magnete. Tenendo conto di ciò e ponendo

$$T = -M, \quad T' = 0, \quad t' = 0, \quad t'' = 0,$$

le quantità X, Y, Z diventano rispettivamente eguali a $4\pi\alpha, 4\pi\beta, 4\pi\gamma$ in tutto lo spazio S_0 ed a zero in tutto lo spazio esterno ad S_0 e si ottiene (6)_a

$$\begin{aligned}(6)_a \quad & - \int (\alpha X' + \beta Y' + \gamma Z') dS_0 \\ & = - \int (Uu' + Vv' + Ww') dS', - \int (Un' + Vv' + Ww') d\sigma',\end{aligned}$$

eguaglianza i cui due membri sono espressioni equivalenti del potenziale mutuo cercato.

È facile vedere come si modificherebbero queste varie formole se vi fossero anche correnti lineari d'intensità finita.



Dalle precedenti equazioni (1)_a, (1)_{a'} si trae

$$\frac{d(W - W')}{ds} = u \left(\frac{dV}{dn} + \frac{dV'}{dn'} \right),$$

(1)_b

$$\frac{dW}{dn} + \frac{dW'}{dn'} = -u \frac{d(V - V')}{ds}.$$

Sia ora σ la superficie generata dalla rotazione della linea s intorno all'asse delle z . Se il sistema di masse cui appartiene la funzione potenziale V comprende una distribuzione *semplice* sulla superficie σ , è noto che, nei punti di questa superficie, si ha $V = V'$ e quindi anche

$$\frac{d(V - V')}{ds} = 0.$$

Dunque, in forza della seconda equazione (1)_b, nei punti di una tal superficie si ha pure

$$\frac{dW}{dn} + \frac{dW'}{dn'} = 0,$$

donde consegue che la derivata normale della funzione associata W si mantiene continua attraverso ad ogni superficie materiale, sede d'una distribuzione semplice appartenente al sistema di masse di cui V è la funzione potenziale.

All'incontro non può essere, in un punto della superficie σ ,

$$\frac{d(W - W')}{ds} = 0$$

se in questo stesso punto non è anche, in forza della prima equazione (1)_b,

$$\frac{dV}{dn} + \frac{dV'}{dn'} = 0;$$

dunque i valori che la funzione associata W prende sulle due faccie d'ogni superficie, sede d'una distribuzione semplice appartenente al sistema di masse di cui V è la funzione potenziale presentano necessariamente una differenza variabile da punto a punto.

Designando con h la densità d'una distribuzione semplice esistente sulla superficie σ , la massa compresa nella zona generata dall'arco $s_1 - s_0$ (supposto $s_1 > s_0$) è

$$= 2\pi \int_{s_0}^{s_1} hu \, ds,$$

ossia, in virtù della prima equazione (1)_a e della nota espressione di h ,

$$(2) \quad = \frac{(W - W')_1 - (W - W')_0}{2}.$$

Questa formola, la quale assegna un significato molto semplice alla differenza $W - W'$, comprende come caso particolare quella già stabilita da Kirchhoff per le distribuzioni elettriche in equilibrio (*Zur Theorie des Condensators*, 1877, p. 103 delle *Gesammelte Abhandlungen*).

Quando la superficie σ si considera come la rappresentazione approssimata d'un conduttore elettrizzato, di spessore estremamente piccolo, in tutta l'estensione del quale la funzione potenziale V abbia un valor costante, le due faccie della detta superficie sono, in generale, sedi di due distinte distribuzioni semplici. La carica della zona anzidetta, in ciascuna di queste due distribuzioni, è data (come risulta facilmente dalla considerazione delle prime equazioni dei due gruppi (1)_a, (1)_{a'}) da

$$(2)_a \quad \frac{W_0 - W_1}{2} \quad \text{sulla faccia di normale } n,$$

$$(2)_{a'} \quad \frac{W_1' - W_0'}{2} \quad \text{sulla faccia di normale } n'.$$

La formola (2) darebbe, in quest'ipotesi, la somma algebrica delle due cariche.

Nel caso particolare che la superficie σ sia piana, cioè che la linea s sia una retta perpendicolare all'asse di simmetria, e che la funzione potenziale V appartenga ad una distribuzione semplice esistente *unicamente* sul piano σ , si ha evidentemente

$$\frac{dV}{dn} = \frac{dV'}{dn'}.$$

e quindi, in virtù delle due prime equazioni (1)_a, (1)_a'.

$$\frac{d(W + W')}{ds} = 0.$$

Se dunque σ è un'area piana circolare e se si dispone della costante additiva contenuta in W per guisa che sia $W = W' = 0$ lungo il contorno dell'area, sarà $W = W' = 0$ in ogni punto del piano esterno all'area e $W + W' = 0$ in ogni punto dell'area stessa. Ciò posto, consideriamo un conduttore in forma di disco circolare, elettrizzato simmetricamente intorno all'asse, sotto l'influenza di forze elettriche esterne, pure simmetriche, le cui funzioni associate sieno v, w , per guisa che la somma $V + v$ sia costante in tutto il disco. Da ciò che precede e dall'osservare che in ogni punto di σ si ha $w = w'$, risulta che la carica della corona compresa fra l'orlo del disco ed il cerchio interno di raggio a è data da

$$(2)_b \quad \frac{W + w - w_a}{2} \quad \text{sulla faccia di normale } n,$$

$$(2)_b' \quad \frac{W - w + w_a}{2} \quad \text{sulla faccia di normale } n',$$

W essendo il valore che prende, sulla circonferenza di raggio a e sulla faccia di normale n , la funzione associata alla funzione potenziale dell'elettricità del disco e w, w_a essendo i valori di w sulla detta circonferenza e su quella di raggio a , supposto a il raggio del disco. La carica totale su amendue le faccie della detta corona è $= W$.

§ 2. Determinazione d'una classe di funzioni associate.

Le equazioni (1) esprimono che i due binomii

$$(3) \quad V ds - \frac{W du}{u} = dV_1, \quad V u du + W ds = dW_1,$$

sono i differenziali esatti (nello spazio esterno alle masse potenzianti) di due nuove funzioni V_1, W_1 , dalle quali le V, W dipendono mediante le formole

$$(3)_a \quad V = \frac{dV_1}{dz}, \quad W = -u \frac{dV_1}{du};$$

$$(3)_b \quad V = \frac{1}{u} \frac{dW_1}{du}, \quad W = \frac{dW_1}{dz};$$

e poichè queste traggono con sè le relazioni

$$\frac{dW_1}{du} = u \frac{dV_1}{dz}, \quad \frac{dW_1}{dz} = -u \frac{dV_1}{du}$$

che hanno l'identica forma delle (1), si conclude che le due nuove funzioni V_1, W_1 costituiscono, in generale (cioè prescindendo dalle altre proprietà necessarie delle funzioni associate, da verificarsi in ciascun caso particolare), il sistema d'una funzione potenziale (esterna) e della sua funzione associata.

Dalle formole (3)_a, (3)_b risulta che mediante una sola funzione, sia potenziale, sia associata, si può formare una serie ascendente (per integrazione) ed una serie discendente (per derivazione) di coppie di funzioni associate. Il carattere generale delle funzioni V è contenuto nell'equazione di Laplace

$$(4) \quad \frac{d}{du} \left(u \frac{dV}{du} \right) + \frac{d}{dz} \left(u \frac{dV}{dz} \right) = 0,$$

che risulta dalle (1) eliminando W ; e quello delle funzioni W è contenuto nell'equazione

$$(4)_a \quad \frac{d}{du} \left(\frac{1}{u} \frac{dW}{du} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{u} \frac{dW}{dz} \right) = 0,$$

che risulta dalle medesime (1) eliminando V . Di queste due equazioni differenziali parziali del second'ordine bisogna tener conto quando si forma, per integrazione, una serie ascendente di funzioni associate, nell'espressione delle quali intervengono funzioni arbitrarie.

Il più semplice esempio di funzione potenziale simmetrica è quello che risulta dall'ipotesi d'una massa unitaria concentrata in un punto dell'asse di simmetria.

Designando con c l'ordinata di questo punto, ponendo

$$r = \sqrt{u^2 + (z - c)^2}$$

e denotando con v, w le funzioni associate relative a questo caso si trova

$$(5) \quad v = \frac{1}{r}, \quad w = \frac{z - c}{r}$$

$$(5)_a \quad v_1 = \log \frac{r + z - c}{u}, \quad w_1 = r.$$

La funzione v_1 , essendo monodroma, continua e finita colle sue derivate in tutti i punti dello spazio, ad eccezione di quelli dell'asse di simmetria ($u = 0$), è la funzione potenziale d'una distribuzione lineare lungo quest'asse. La densità di tale distribuzione è data da

$$-\frac{1}{2} u \frac{dv_1}{du}, \text{ ossia da } \frac{1}{2} w, \text{ per } u = 0:$$

questa densità è dunque $= \frac{1}{2}$ in tutti i punti dell'asse nei quali $z > c$ ed è $= -\frac{1}{2}$ in tutti quelli nei quali $z < c$. Le superficie equipotenziali di questa distribuzione sono coni di rotazione col vertice nel punto ($u = 0, z = c$), epperò le linee di forza ($w_1 = \text{cost.}$) sono semi-circonferenze col centro in questo punto.

Le due funzioni v e w , hanno in comune una proprietà molto spiccata: sono, cioè, le sole funzioni di r (distanza del punto potenziato variabile da un punto fisso dell'asse) che rendano soddisfatte le equazioni caratteristiche (4), (4)_a.

Si dimostra molto facilmente, mediante le equazioni (1), che se (V, W) , (v, w) sono due coppie qualunque di funzioni associate, il binomio

$$(6) \quad V dw + W dv$$

è sempre un differenziale esatto (nello spazio esterno alle masse). Di qui segue, in particolare, con riguardo alle formole (5), che, qualunque sia il punto ($u = 0, z = c$), il binomio

$$(6)_a \quad V d \frac{z - c}{r} + W d \frac{1}{r} = dP$$

è sempre il differenziale esatto d'una certa funzione P delle variabili u e z . Questa funzione non possiede il carattere nè di una

plesso e se si prende la parte reale del risultato, si ottengono funzioni potenziali d'altre distribuzioni. Facciamo, per esempio, $c = it$ e, mutando opportunamente la designazione della funzione arbitraria $f(c)$, poniamo

$$(7) \quad U = \int_{-a}^a F'(t) \sqrt{u^2 + (z + it)^2} dt,$$

dove a è una costante reale e positiva e dove $F(t)$ è una funzione reale, monodroma, continua e finita nell'intervallo da $t = 0$ a $t = a$, che si annulla per $t = 0$ e la cui derivata $F'(t)$ è proseguita nell'intervallo da $t = 0$ a $t = -a$ colla legge

$$F'(t) = F'(-t).$$

In tali ipotesi il valore di U riesce di per sè stesso reale e le espressioni che se ne deducono per V e per W , cioè

$$(7)_a \quad V = \int_{-a}^a \frac{F'(t) dt}{\sqrt{u^2 + (z + it)^2}}, \quad W = \int_{-a}^a \frac{F'(t)(z + it) dt}{\sqrt{u^2 + (z + it)^2}}$$

hanno significati molto interessanti, rappresentano, cioè, la funzione potenziale e la funzione associata d'una distribuzione simmetrica sul disco circolare di raggio a , giacente nel piano $z = 0$. Ciò verrà dimostrato nel § 4.

(Per maggiori svolgimenti intorno alle proprietà generali esposte nella prima parte di questo § e conducenti alle formole testè stabilite per V e W , si veggia la mia Nota del 1878 *Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse*, inserita negli *Atti del R. Istituto Lombardo*).

§ 3. Osservazioni retrospettive.

La prima delle espressioni $(7)_a$ è, in sostanza, quella che già ottenni nel § 10 della Memoria *Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche*, pubblicata nel 1881. Ivi essa si presentava come il risultato della trasformazione d'un'altra espressione di V , che formava il principale argomento del lavoro, ed io davo appunto termine a questo con un cenno sommario delle proprietà di quella formola. Ma ora credo opportuno di completare quei

cenni, prima di tutto considerando simultaneamente le *due* funzioni associate V e W , sotto le forme corrispondenti (7)₁, ed in secondo luogo dimostrandone le proprietà fondamentali indipendentemente da qualunque previsione sulla natura e sul significato di esse. All'infuori di quella dell'essere esse due funzioni associate, la prima delle quali soddisfa visibilmente alle note condizioni di continuità e di convergenza (all'infinito) di una funzione potenziale.

V è anche un'altra considerazione di massima per la quale credo utile stabilire direttamente le proprietà delle espressioni (7)₁: ed è l'intervento in queste espressioni d'una variabile complessa ausiliaria. Il nesso intimo che vige fra la teoria del potenziale e quella delle funzioni di variabile complessa è noto da lungo tempo, specialmente per ciò che si riferisce ai potenziali logaritmici. Ma, più recentemente, esso è stato invocato utilmente anche nella risoluzione d'altre questioni relative al potenziale, ed in specie per quella dei condensatori elettrici, come si può vedere in Maxwell (*Treatise*, parte I. cap. XII), Kirchhoff (Memoria già citata), Betti (*Teorica delle forze newtoniane*, pag. 263). Nelle lezioni di Riemann (*Schwere, Elektrizität und Magnetismus*) si fa uso dell'integrazione complessa nel calcolo delle componenti d'attrazione d'un cilindro ellittico finito. E non mancano altri esempi di consimili applicazioni. È probabile che l'uso delle variabili complesse, come strumento per la deduzione di funzioni potenziali più difficilmente trattabili con altri processi, si possa estendere ulteriormente, e sotto aspetti diversi. Ma mi sembra che fin d'ora s'intravedga molto chiaramente l'opportunità, per non dire la spontaneità, di tale applicazione a quella classe di funzioni potenziali che ho chiamato *simmetriche*, perchè appartengono a sistemi di masse simmetricamente distribuite intorno ad un asse rettilineo e dipendono perciò, come le logaritmiche, da due sole variabili indipendenti.

Ciò apparisce molto manifestamente dal già citato e bellissimo lavoro di Kirchhoff. Da un breve cenno contenuto nel *Jahrbuch ueber die Fortschritte der Mathematik*, t. XI, p. 752, rilevo che, in un lavoro del quale sfortunatamente non ho potuto prendere cognizione, Mehler aveva già svolto nel 1879, mediante espressioni della specie di quelle considerate nella citata mia

Memoria del 1881 e nella presente, una nuova soluzione del celebre problema di Poisson intorno a due conduttori sferici elettrizzati. Finalmente, alla pag. 523 delle *Wissenschaftliche Abhandlungen* di Helmholtz è inserita una breve Nota (in data del 1881) nella quale si fa cenno d'un principio di trasformazione del potenziale, che è fondato sull'uso dell'immaginario e che rientra nel genere di considerazioni cui ora alludo.

Del resto gli svolgimenti dei §§ successivi giustificano l'attenzione di cui mi sembrano meritevoli le formole (7)_a e le proprietà che ora procedo a dimostrarne.

§ 4. Proprietà delle funzioni associate definite nel § 2.

Poniamo

$$(8) \quad \sqrt{u^2 + (z + it)^2} = S + iT,$$

donde

$$(8)_a \quad u^2 + z^2 - t^2 = S^2 - T^2, \quad zt = ST$$

e quindi

$$(8)_b \quad \begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{2} [\sqrt{(u^2 + z^2 - t^2)^2 + 4z^2t^2} + u^2 + z^2 - t^2], \\ T^2 &= \frac{1}{2} [\sqrt{(u^2 + z^2 - t^2)^2 + 4z^2t^2} - u^2 - z^2 + t^2], \end{aligned}$$

espressioni in cui il radicale deve prendersi in valore assoluto. Se si immagina fatto un taglio nel piano (uz) lungo la retta $z = 0$, da $u = 0$ ad $u = a$, il punto (u, z) non può mai compiere un giro intorno ad uno dei punti nei quali la quantità S diventa nulla nel corso dell'integrazione rispetto a t , epperò questa quantità non può mai cangiare di segno. Se dunque si conviene di prendere sempre positivamente il valore di S dato dalla prima delle equazioni (8)_b, bisogna, in virtù della seconda equazione (8)_a, dare sempre al valore di T , desunto dalla seconda equazione (8)_b, il segno del prodotto zt . Ne segue che, per $z = \pm 0$ e per t positivo, si ha

$$(8)_c \quad \begin{aligned} S &= \sqrt{u^2 - t^2}, & T &= 0, & \text{se } t < u \\ S &= 0, & T &= \pm \sqrt{t^2 - u^2} & \text{se } t > u \end{aligned}$$

Delle due funzioni (7)_a la prima evidentemente non cambia di valore nè di segno cambiando z in $-z$; la seconda invece conserva lo stesso valore assoluto, ma cangia di segno. Da quest'ultima proprietà risulta (§ 1) che la distribuzione di massa cui appartengono le due funzioni associate V e W giace sul piano $z = 0$. Ora facendo $z = \pm 0$ si ha, per le equazioni (8)_c,

$$(9) \begin{cases} V = 2 \int_0^u \frac{F'(t) dt}{\sqrt{u^2 - t^2}}, & W = \pm 2 \int_u^a \frac{F'(t) t dt}{\sqrt{t^2 - u^2}}, & \text{se } u < a, \\ V = 2 \int_0^a \frac{F'(t) dt}{\sqrt{u^2 - t^2}}, & W = 0, & \text{se } u > a, \end{cases}$$

dunque, per ciò che si avvertì alla fine del § 1, la detta distribuzione giace tutta entro il cerchio di raggio a ed è tale che la porzione di massa, che diremo E_u , contenuta fra questo cerchio ed il cerchio interno di raggio u , è data da

$$(9)_a \quad E_u = 2 \int_u^a \frac{F(t) t dt}{\sqrt{t^2 - u^2}}.$$

La carica totale è

$$(9)_b \quad E = 2F(a)$$

e la densità h in ogni punto della circonferenza di raggio u è data da

$$(9)_c \quad h = -\frac{1}{2\pi u} \frac{dE_u}{du}.$$

Reciprocamente, data la densità h in funzione di u , si può determinare la corrispondente funzione $F'(t)$. Infatti dall'equazione precedente e dalla (9)_a si deduce

$$\begin{aligned} \int_s^a u h(u) \sqrt{u^2 - s^2} du &= -\frac{1}{2\pi} \int_s^a \frac{dE_u}{du} \sqrt{u^2 - s^2} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_s^a \frac{E_u u du}{\sqrt{u^2 - s^2}} = \frac{1}{\pi} \int_s^a \frac{u du}{\sqrt{u^2 - s^2}} \int_u^a \frac{F'(t) t dt}{\sqrt{t^2 - u^2}} \end{aligned}$$

ossia, invertendo l'ordine delle integrazioni colla regola di Diriclet,

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^a F'(t) t dt \int_0^t \frac{u du}{V(t^2 - u^2)(u^2 - s^2)} = \frac{1}{\pi} \int_0^a F'(t) t dt.$$

Si ha dunque per ogni valore di t compreso fra 0 ed a ,

$$\int_t^a F'(t) t dt = 2 \int_t^a u h(u) V u^2 - t^2 du,$$

eperò, derivando rispetto a t , si ottiene il cercato valore di $F'(t)$ sotto la forma

$$(10) \quad F'(t) = 2 \int_t^a \frac{h(u) u du}{V u^2 - t^2}.$$

A riprova di quest'espressione, si può osservare che essa, sostituita nell'equazione (9)_a, dà

$$E_u = 2\pi \int_u^a h(u) u du,$$

formola che riproduce per l'appunto la definizione di E_u .

D'altra parte, scrivendo $V(u)$ in luogo di V nel primo membro della prima equazione (9), si ha da questa stessa equazione

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{V(u) u du}{V s^2 - u^2} &= 2 \int_0^s \frac{u du}{V s^2 - u^2} \int_0^u \frac{F'(t) dt}{V u^2 - t^2} \\ &= 2 \int_0^s F'(t) dt \int_t^s \frac{u du}{V (s^2 - u^2)(u^2 - t^2)} \pi F(s). \end{aligned}$$

Quindi se si prende per $F(t)$ la funzione

$$(10)_a \quad F(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{V(u) u du}{V t^2 - u^2},$$

si ottengono dalle equazioni (7)_a le due funzioni associate relative a *quella* distribuzione per la quale la funzione potenziale

prende sul disco i *dati* valori $V(u)$, valori che devono supporre continui e finiti.

Anche di questo risultato possiamo ottenere la verifica osservando che la precedente espressione di $F(t)$, scritta nella forma

$$\begin{aligned} F(t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^t V(u) \frac{d\sqrt{t^2 - u^2}}{du} du \\ &= \frac{1}{\pi} V(0) t + \frac{1}{\pi} \int_0^t V'(u) \sqrt{t^2 - u^2} du \end{aligned}$$

dà

$$F'(t) = \frac{1}{\pi} V(0) + \frac{t}{\pi} \int_0^t \frac{V'(u) du}{\sqrt{t^2 - u^2}},$$

il qual valore di $F'(t)$, sostituito nella prima dell'equazioni (9) dà alla sua volta

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{\pi} V(0) \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{u^2 - t^2}} + \frac{2}{\pi} \int_0^u \frac{t dt}{\sqrt{u^2 - t^2}} \int_0^t \frac{V'(s) ds}{\sqrt{t^2 - s^2}} \\ &= V(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^u V'(s) ds \int_s^u \frac{t dt}{\sqrt{(u^2 - t^2)(t^2 - s^2)}} = V(u), \end{aligned}$$

come appunto dev'essere.

Le formole (10), (10)_a rendono possibile la determinazione, mediante le equazioni (7)_a, delle due funzioni associate relative a qualunque distribuzione simmetrica semplice sul disco di raggio a , quando sia data o la densità h di tale distribuzione, od il valore V che la funzione potenziale deve prendere in ogni punto del disco stesso.

§ 5. Applicazioni delle formole precedenti.

Facciamo subito alcune applicazioni semplici dei precedenti teoremi, le quali ci serviranno di base per la trattazione di successivi problemi d'indole diversa.

Per ottenere le formole relative alla distribuzione *in equilibrio* sul disco, si porrà nell'equazione (10), $V(u) = 1$ e si troverà

$$(11) \quad F(t) = \frac{t}{\pi}.$$

Le equazioni (7)_a, (9)_a, (9)_b, (9)_c danno in tal caso i risultati noti, che non è necessario di qui trascrivere.

Per ottenere invece le formole relative alla distribuzione *uniforme*, si porrà nell'equazione (10) $h(u) = 1$ e si troverà

$$(12) \quad F'(t) = 2 \sqrt{a^2 - t^2},$$

donde, per le equazioni (7)_a,

$$(12)_a \quad V = 2 \int_{-a}^a \frac{dt \sqrt{a^2 - t^2}}{\sqrt{u^2 + (z + it)^2}}, \quad W = 2 \int_{-a}^a \frac{dt (z + it) \sqrt{a^2 - t^2}}{\sqrt{u^2 + (z + it)^2}},$$

espressioni molto notevoli per la loro semplicità e dalle quali si possono ricavare molto facilmente le analoghe funzioni V , W per il cilindro retto omogeneo, terminato a due sezioni rette.

Consideriamo, in vista di una successiva applicazione, la distribuzione in cui la densità h è inversamente proporzionale al cubo della distanza del punto cui la densità si riferisce da un punto ($z = c$) dell'asse di simmetria. Si ha in questo caso, denotando con b una costante,

$$h = \frac{b}{r^3}, \quad \text{dove} \quad r^2 = u^2 + c^2,$$

epperò l'equazione (10) dà

$$\begin{aligned} F'(t) &= 2b \int_{-a}^a \frac{u du}{r^3 \sqrt{u^2 - t^2}} = 2b \int_{\frac{\sqrt{c^2 + a^2}}{\sqrt{c^2 + t^2}}}^{\frac{\sqrt{c^2 + a^2}}{\sqrt{c^2 + t^2}}} \frac{dr}{r^3 \sqrt{r^2 - c^2 - t^2}} \\ &= \frac{2b}{c^2 + t^2} \int_{\frac{\sqrt{c^2 + a^2}}{\sqrt{c^2 + t^2}}}^{\frac{\sqrt{c^2 + a^2}}{\sqrt{c^2 + t^2}}} d \sqrt{1 - \frac{c^2 + t^2}{r^2}}. \end{aligned}$$

cioè

$$(13) \quad F'(t) = \frac{2b \sqrt{a^2 - t^2}}{r_0 (c^2 + t^2)}, \quad \text{dove} \quad r_0^2 = a^2 + c^2.$$

Fermiamoci un poco più sulla distribuzione elettrica provocata per induzione nel disco, comunicante col suolo, da un'unità elettrica positiva collocata nel punto ($u = 0, z = c > 0$). Ponendo a tal fine nell'equazione (10)_a

$$V(u) = - \frac{1}{\sqrt{c^2 + u^2}}$$

si ottiene

$$F(t) = - \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{u du}{\sqrt{(c^2 + u^2)(t^2 - u^2)}} = - \frac{1}{\pi} \text{Arc cos } \frac{c}{\sqrt{c^2 + t^2}},$$

donde

$$(14) \quad F'(t) = - \frac{c}{\pi(c^2 + t^2)}.$$

Sostituendo questo valore nelle equazioni (7)_a si ha

$$(14)_a \quad \begin{cases} V = - \frac{c}{\pi} \int_{-a}^a \frac{dt}{(c^2 + t^2) \sqrt{u^2 + (z + it)^2}}, \\ W = - \frac{c}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(z + it) dt}{(c^2 + t^2) \sqrt{u^2 + (z + it)^2}}, \end{cases}$$

Alla superficie del disco si ha, in virtù delle formole (9),

$$(14)_b \quad W = \mp \frac{2c}{\pi} \frac{1}{\sqrt{c^2 + u^2}} \text{Arc cos } \sqrt{\frac{c^2 + u^2}{c^2 + a^2}}, \quad z = \pm 0.$$

Per calcolare le cariche su ciascuna delle due faccie separatamente, si osservi (cfr. la fine del § 1) che le funzioni associate relative al sistema costituito dal punto inducente e dallo strato indotto sono, ricordando le formole (5),

$$\frac{1}{r} + V, \quad \frac{z - c}{r} + W, \quad \text{dove } r = \sqrt{u^2 + (z - c)^2}.$$

Alla superficie del disco la seconda di queste funzioni diventa, per la formola (14)_b,

$$- \frac{c}{r} \left\{ 1 \pm \frac{2}{\pi} \text{Arc cos } \frac{r}{r_0} \right\},$$

dove $r = \sqrt{a^2 + c^2}$, $r_0 = \sqrt{a^2 + c^2}$ e dove il segno superiore corrisponde alla faccia rivolta verso il punto inducente, l'inferiore alla faccia opposta. Ne risulta che la carica E_u è, per la prima faccia,

$$E_u = -\frac{c}{\pi r} \operatorname{Arc} \cos \frac{r}{r_0} - \frac{c}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

e per la seconda

$$E_u' = -\frac{c}{\pi r} \operatorname{Arc} \cos \frac{r}{r_0} + \frac{c}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right).$$

Di qui deduconsi facilmente la carica totale, la densità su ciascuna faccia, ecc. Una più minuta discussione di questo caso d'induzione può trovarsi in una mia Nota *Intorno ad alcune questioni d'elettrostatica* (Atti del R. Istituto Lombardo, 1877), dove ho già dato le espressioni delle due funzioni associate sotto un'altra forma, di cui mostrerò più tardi (§ 10) il nesso colla presente.

§ 6. Teorema d'inversione.

Ritorniamo nuovamente al caso d'un sistema simmetrico qualunque e, designando con c un'ordinata costante, poniamo

$$(15) \quad u + i(z - c) = \xi, \quad u - i(z - c) = \eta, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Introducendo queste nuove variabili ξ, η al posto delle u, z nelle funzioni V, W , le equazioni fondamentali (1) diventano

$$(15)_a \quad \frac{dW}{d\xi} = i \frac{\xi + \eta}{2} \frac{dV}{d\xi}, \quad \frac{dW}{d\eta} = -i \frac{\xi + \eta}{2} \frac{dV}{d\eta}.$$

Si eseguisca ora l'inversione (per raggi vettori reciproci) rispetto al punto ($u = 0, z = c$) come centro, col raggio r_0 , e si denotino con u', z' le coordinate del punto reciproco di (u, z). Ponendo

$$(15)' \quad u' + i(z' - c) = \xi', \quad u' - i(z' - c) = \eta',$$

tale inversione è rappresentata dalle formole semplicissime

$$(15)_b \quad \xi \eta' = \xi' \eta = r_0^2.$$

Sieno V' , W' le funzioni associate relative ad un sistema di masse esistenti nello spazio (u', z') : considerando queste funzioni come formate colle variabili ξ', η' , avremo (15)_a

$$(15)_a' \quad \frac{dW'}{d\xi'} = i \frac{\xi' + \eta'}{2} \frac{dV'}{d\xi'}, \quad \frac{dW'}{d\eta'} = -i \frac{\xi' + \eta'}{2} \frac{dV'}{d\eta'}.$$

Ma, in virtù delle relazioni (15)_b, le funzioni V' , W' si possono anche concepire formate colle variabili ξ, η : in tale ipotesi le precedenti equazioni (15)_a' diventano

$$\frac{dW'}{d\xi} = -i \frac{\xi + \eta}{2\xi\eta} r_0^3 \frac{dV'}{d\xi}, \quad \frac{dW'}{d\eta} = i \frac{\xi + \eta}{2\xi\eta} r_0^3 \frac{dV'}{d\eta},$$

donde

$$\frac{dW'}{d\xi} \pm \frac{dW'}{d\eta} = -i \frac{\xi + \eta}{2\xi\eta} r_0^3 \left\{ \frac{dV'}{d\xi} \mp \frac{dV'}{d\eta} \right\}.$$

Di quì, riponendo al posto delle variabili ξ, η le primitive coordinate u, z , si ricavano le relazioni seguenti

$$(16) \quad \frac{dW'}{du} = -\frac{r_0^3 u}{r^3} \frac{dV'}{dz}, \quad \frac{dW'}{dz} = \frac{r_0^3 u}{r^3} \frac{dV'}{du},$$

dove

$$r = \sqrt{u^2 + (z - c)^2}.$$

Sono queste le relazioni che hanno luogo fra due funzioni associate V' , W' quando queste sono espresse non già colle *proprie* variabili u', z' , ma colle variabili *inverse* u, z .

Ora dalla teoria dell'inversione è noto che, se V è la funzione potenziale d'un sistema di masse, la funzione potenziale V' del sistema inverso si ottiene operando l'inversione delle variabili nella funzione

$$V' = CVr,$$

dove C è una costante da determinarsi opportunamente ed r è la distanza del punto variabile (u, z) dal centro d'inversione. Sostituendo questo valore di V' nelle equazioni (16) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dW'}{du} &= -\frac{Cr_0^3 u}{r} \frac{dV}{dz} - \frac{Cr_0^3 u(z-c)}{r^3} V, \\ \frac{dW'}{dz} &= \frac{Cr_0^3 u}{r} \frac{dV}{du} + \frac{Cr_0^3 u^2}{r^3} V, \end{aligned}$$

ossia, in virtù delle equazioni (1),

$$\begin{aligned} \frac{dW'}{du} + \frac{Cr_0^2}{r} \frac{dW}{du} &= - \frac{Cr_0^2 u (z - c)}{r^3} V, \\ \frac{dW'}{dz} + \frac{Cr_0^2}{r} \frac{dW}{dz} &= \frac{Cr_0^2 u^2}{r^3} V, \end{aligned}$$

dove W è la funzione associata della primitiva funzione potenziale V . Di qui risulta

$$d\left(W' + \frac{Cr_0^2}{r} W\right) = Cr_0^2 \left\{ V d \frac{z - c}{r} + W d \frac{1}{r} \right\},$$

epperò, introducendo la funzione P definita dall'equazione (6)_a, si conclude

$$(17) \quad V' = CVr, \quad W' = Cr_0^2 \left(P - \frac{W}{r} \right).$$

Per avere dunque le funzioni V' , W' , formate colle coordinate inverse u' , z' basta operare l'inversione delle coordinate u , z , dei secondi membri di queste ultime equazioni.

Ma vi è di più. Tale inversione può essere rappresentata dalle relazioni

$$rr' = r_0^2, \quad \frac{z' - c}{r'} = \frac{z - c}{r},$$

dove

$$r' = \sqrt{u'^2 + (z' - c)^2};$$

ora dalle equazioni (17), in virtù di queste relazioni, si trae

$$\begin{aligned} & V' d \frac{z' - c}{r'} + W' d \frac{1}{r'} \\ &= CV r d \frac{z - c}{r} + C \left(P dr - \frac{W dr}{r} \right) \\ &= CP dr + Cr \left(V d \frac{z - c}{r} + W d \frac{1}{r} \right) \\ &= d(CPr); \end{aligned}$$

dunque la funzione P ha quest'importante proprietà, che mentre, *prima* dell'inversione, si ha

§ 7. *Applicazione alle funzioni associate della calotta sferica.*

Calcoliamo la funzione P relativa ad una distribuzione simmetrica sul solito disco circolare, relativa, cioè al caso che le funzioni V, W sieno del tipo (7)_a.

Ponendo, per un momento,

$$s = c + r \cos \theta, \quad c + it = s,$$

le dette funzioni V, W diventano

$$V = \int_{-a}^a \frac{F'(t) dt}{\sqrt{r^2 + 2rs \cos \theta + s^2}},$$

$$W = \int_{-a}^a \frac{F'(t)(r \cos \theta + s) dt}{\sqrt{r^2 + 2rs \cos \theta + s^2}},$$

Usando il simbolo δ come caratteristico d'una differenziazione relativa alle sole variabili r e θ , si trova

$$\begin{aligned} & V \delta \frac{s-c}{r} + W \delta \frac{1}{r} \\ &= \int_{-a}^a \frac{\delta \cos \theta + (r \cos \theta + s) \delta \frac{1}{r}}{\sqrt{r^2 + 2rs \cos \theta + s^2}} F'(t) dt \\ &= \int_{-a}^a \frac{\delta \frac{\cos \theta}{r} + s \frac{1}{r} \delta \frac{1}{r}}{\sqrt{1 + 2s \frac{\cos \theta}{r} + \frac{s^2}{r^2}}} F''(t) dt \\ &= \int_{-a}^a \frac{F'(t) dt}{s} \delta \frac{\sqrt{r^2 + 2rs \cos \theta + s^2}}{r}. \end{aligned}$$

Di qui segue immediatamente che la cercata funzione P è data da

$$(18) \quad P = \frac{1}{r} \int_{-a}^a \frac{F''(t) \sqrt{u^2 + (s + it)^2} dt}{c + it}$$

rale risultato delle sostituzioni che converrebbe di fare per agevolare l'esecuzione delle sopradette integrazioni.

Mostriamo piuttosto come dal metodo quì tenuto si possa trarre facilmente partito per la determinazione completa della distribuzione elettrica in equilibrio sulla calotta.

La funzione (19) può scriversi, in virtù della formola (8), nel modo seguente

$$P = -\frac{c}{\pi r} \int_{-a}^a \frac{cS + tT}{(c^2 + t^2)^2} dt,$$

od anche in quest'altro modo

$$P = \frac{1}{\pi r} \left\{ c \frac{d}{dc} \int_0^a \frac{S dt}{c^2 + t^2} + \frac{d}{dc} \int_0^a \frac{T t dt}{c^2 + t^2} \right\}.$$

Per $s = \pm 0$ si ha (8)_c

$$\int_0^a \frac{S dt}{c^2 + t^2} = \int_0^a \frac{dt \sqrt{u^2 - t^2}}{c^2 + t^2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{c} - 1 \right), \quad r = \sqrt{u^2 + c^2},$$

$$\int_0^a \frac{T t dt}{c^2 + t^2} = \pm \int_u^a \frac{t dt \sqrt{t^2 - u^2}}{c^2 + t^2} = \pm \left(\sqrt{a^2 - u^2} - r \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{r} \right);$$

quindi

$$\frac{d}{dc} \int_0^a \frac{S dt}{c^2 + t^2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{c^2} \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc} \int_0^a \frac{T t dt}{c^2 + t^2} &= \pm \left(\frac{c \sqrt{a^2 - u^2}}{r_0^2} - \frac{c}{r} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{r} \right) \\ &= \pm \left(\frac{c \sqrt{r_0^2 - r^2}}{r_0^2} - \frac{c}{r} \operatorname{Arc} \cos \frac{r}{r_0} \right), \end{aligned}$$

epperò

$$P = \frac{c}{\pi r^2} \left\{ \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{r^2}{c^2} \right) \pm \frac{r \sqrt{r_0^2 - r^2}}{r_0^2} \mp \operatorname{Arc} \cos \frac{r}{r_0} \right\}, \quad s = \pm 0.$$

Per $u = a$, cioè per $r = r_0$, questa quantità si riduce a

$$\frac{c}{\pi r_0^3} \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{r_0^3}{c^3}\right),$$

ossia a

$$\frac{c}{\pi r^3} \frac{\pi}{2} \left(\frac{r^3}{r_0^3} - \frac{r^3}{c^3}\right).$$

Aggiungendo a P questa quantità *costante*, presa con segno negativo, il che è manifestamente lecito, si ottiene

$$P = \frac{c}{\pi r^3} \left\{ \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{r^3}{r_0^3}\right) \pm \frac{r \sqrt{r_0^3 - r^3}}{r_0^3} \mp \text{Arc cos } \frac{r}{r_0} \right\}, \quad s = \pm 0.$$

Se si sostituisce questo valore di P, insieme con quello di W dato dall'equazione (14)_b ed equivalente a

$$W = \mp \frac{2c}{\pi r} \text{Arc cos } \frac{r}{r_0}, \quad s = \pm 0,$$

nella seconda delle equazioni (17) e se si fa in questa $C = -1$, si ottiene

$$W' = \frac{cr_0^3}{\pi r^3} \left\{ \frac{\pi}{2} \left(\frac{r^3}{r_0^3} - 1\right) \mp \frac{r \sqrt{r_0^3 - r^3}}{r_0^3} \mp \text{Arc cos } \frac{r}{r_0} \right\}, \quad s = \pm 0;$$

e se finalmente si opera l'inversione rappresentata da $r\rho = r_0^3$ (dove ρ sta in luogo di r') si trova

$$(19)_a \quad W' = \frac{\rho^3}{2\pi R} \left\{ \frac{\pi}{2} \left(\frac{\rho_0^3}{\rho^3} - 1\right) \mp \frac{\rho_0 \sqrt{\rho^3 - \rho_0^3}}{\rho^3} \mp \text{Arc cos } \frac{\rho_0}{\rho} \right\},$$

dove R è il raggio della superficie sferica di cui fa parte la calotta considerata, cioè dove si è posto

$$\frac{r_0^3}{c} = 2R, \quad r_0 = \rho_0.$$

Dietro quanto precede, questa quantità W' è dunque il valore che la funzione associata della distribuzione in equilibrio sulla calotta sferica di raggio R prende nei punti della calotta stessa, e propriamente i segni superiori appartengono ai punti della faccia *convessa* della calotta (i quali corrispondono per inversione a quelli della faccia del disco rivolta al punto inducente, cioè

a quelli per i quali $s = +0$), mentre i segni inferiori appartengono ai punti della faccia *concava* (i quali corrispondono a quelli della faccia $s = -0$ del disco): ρ è la distanza del punto cui si riferisce W' dal polo esterno della calotta, ρ_0 è il valore di ρ nei punti dell'orlo terminale della calotta. Per $\rho = \rho_0$ la funzione W' si annulla, epperò essa passa con continuità dai valori positivi che possiede sulla faccia concava ai valori negativi che possiede sulla faccia convessa.

Rammentando le convenzioni su cui furono fondate le formole (2)_a, (2)_{a'}, si vedrà che le cariche della zona compresa fra l'orlo della calotta ed il parallelo (ρ) sono date rispettivamente da

$$\begin{aligned} +\frac{1}{2} W'_\rho & \quad \text{per la faccia concava,} \\ -\frac{1}{2} W'_\rho & \quad \text{per la faccia convessa.} \end{aligned}$$

Designando dunque queste cariche con E_ρ , E'_ρ si ha (19)_a

$$(19)_b \quad \begin{cases} E_\rho = \frac{\rho^2}{4\pi R} \left(\text{Arc cos } \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{\rho_0 \sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}}{\rho^2} \right) - \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{8R} \\ E'_\rho = \frac{\rho^2}{4\pi R} \left(\text{Arc cos } \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{\rho_0 \sqrt{\rho^2 - \rho_0^2}}{\rho^2} \right) + \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{8R} \end{cases}$$

Le cariche totali, E ed E' , sulle dette due faccie, si ottengono facendo $\rho = 2R$ e sono facilmente riducibili alle forme

$$(19)_c \quad \begin{cases} E = \frac{a+s}{2\pi} - \frac{a^2 R}{2\rho_0^2} \\ E' = \frac{a+s}{2\pi} + \frac{a^2 R}{2\rho_0^2} \end{cases}$$

dove s è il raggio sferico della calotta, cioè l'arco generatore di questa: la capacità elettrica della calotta è dunque data da

$$(19)_d \quad E + E' = \frac{a+s}{\pi},$$

formola semplice ed elegante già notata da Betti e trovata pure da Neumann.

Se con ϵ s'indica l'angolo formato da un raggio R diretto

all'orlo della calotta con quello diretto al polo esterno di questa si ha

$$s = (\pi - \varepsilon) R, \quad a = R \sin \varepsilon, \quad \rho_0 = 2 R \sin \frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi (19)_c

$$E = \frac{R}{2} \left(\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{\pi} \right),$$

$$E' = \frac{R}{2} \left(1 + \cos^2 \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{\pi} \right).$$

Per piccoli valori di ε si ha di qui

$$E = R \left(\frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{\varepsilon^3}{12\pi} \right), \quad E' = R \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{\varepsilon^3}{12\pi} \right),$$

$$E + E' = R \left(1 - \frac{\varepsilon^3}{6\pi} \right).$$

Queste formole possono servire di complemento ai risultati dell'ingegnosa analisi approssimata di Green, cui abbiamo già fatto allusione (§ 7).

Dalle espressioni (19)_b si desumono quelle delle densità h, h' sulle due faccie concava e convessa, mediante le formole

$$(19)_c \quad h = \frac{1}{2\pi\rho} \frac{dE_\rho}{d\rho}, \quad h' = \frac{1}{2\pi\rho} \frac{dE_{\rho'}}{d\rho},$$

e queste, sviluppate, riproducono i valori che si trovano cogli altri metodi, i quali non conducono direttamente alle formole (19)_b. Omettiamo di dare tale sviluppo e facciamo invece un'osservazione su questi valori delle densità.

§ 9. Breve digressione.

La differenza delle cariche sulle due faccie d'una medesima zona è data, per le formole (19)_b, da

$$E_{\rho'} - E_\rho = \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{4R} = \frac{\sigma}{4\pi R},$$

dove σ è l'area della zona. Ne risulta (19)_c che la differenza delle densità sulle due faccie è costante in ogni punto ed

$$= \frac{1}{4\pi R}.$$

Per comprendere *a priori* la ragione di questo fatto, il quale non è peculiare al caso della calotta, consideriamo la funzione potenziale

$$V = \int \frac{h d\sigma}{r}$$

d'una distribuzione semplice, di densità per ora qualunque, esistente sulla superficie sferica di raggio R , r essendo la distanza dell'elemento superficiale $d\sigma$ dal punto qualunque M , cui si riferisce la funzione V . Se r' è la distanza dello stesso elemento $d\sigma$ dal punto M' , inverso di M rispetto alla sfera σ , il valore V' di V in questo secondo punto, cioè il valore

$$V' = \int \frac{h d\sigma}{r'},$$

è legato a V dalla nota relazione

$$V' = \frac{\xi}{R} V,$$

dove ξ è la distanza del punto M dal centro della sfera. Denotando con ξ' l'analogia distanza del punto M' e tenendo conto della relazione $\xi\xi' = R^2$, si trova

$$-\frac{dV'}{d\xi'} \frac{R^2}{\xi^2} = \frac{V}{R} + \frac{\xi}{R} \frac{dV}{d\xi}.$$

Facendo quindi tendere il punto M , e però anche M' , verso la superficie sferica e supponendo il primo interno, il secondo esterno a questa, si ha

$$(a) \quad \frac{dV}{dn} - \frac{dV'}{dn'} = \frac{V}{R},$$

dove n è la normale interna, n' l'esterna.

Ciò posto se la distribuzione di potenziale V è quella dell'elettricità in equilibrio sopra un conduttore di spessore infinitamente piccolo, la cui superficie media possa considerarsi come una porzione (del resto *qualunque*) di superficie sferica di rag-

gio R , e se si suppone $V = 1$ nella massa di questo conduttore, le densità h ed h' dei due strati esistenti sulle faccie di normali n ed n' (la cui somma equivarrebbe alla h che entrava nell'espressione di V) sono date dalle formole

$$h = -\frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dn}, \quad h' = -\frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dn'}$$

e l'equazione precedente dà

$$h - h' = \frac{1}{4\pi R}$$

Di quì risulta poi immediatamente, designando con E_σ, E_σ' le cariche su due porzioni finite corrispondenti delle faccie concava e convessa, di comune area σ , che si ha anche

$$E_\sigma' - E_\sigma = \frac{\sigma}{4\pi R}.$$

È da queste relazioni più generali che scaturiscono, come caso particolare, quelle di cui la calotta sferica offre l'esempio.

Osserviamo, per incidenza, che se di nuovo si considera la superficie sferica σ come sede d'una distribuzione semplice di densità h , combinando l'equazione (a) colla

$$\frac{dV}{dn} + \frac{dV'}{dn'} = -4\pi h,$$

si ottiene

$$(b) \quad 2 \frac{dV}{dn} + 4\pi h = \frac{V_\sigma}{R}, \quad 2 \frac{dV'}{dn'} + 4\pi h = -\frac{V_\sigma}{R},$$

dove V_σ designa il comun valore di V e di V' nel punto di ove sono erette le normali n, n' . Da queste relazioni si ha

$$2 \int \frac{dV}{dn} \frac{d\sigma}{r} + 4\pi V = \frac{1}{R} \int \frac{V_\sigma d\sigma}{r},$$

$$2 \int \frac{dV'}{dn'} \frac{d\sigma}{r'} + 4\pi V' = -\frac{1}{R} \int \frac{V_\sigma d\sigma}{r'};$$

ma dal teorema di Green si ha pure

$$\int \frac{dV}{dn} \frac{d\sigma}{r} = \int V_{\sigma} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma - 4\pi V,$$

$$\int \frac{dV'}{dn'} \frac{d\sigma}{r'} = \int V_{\sigma} \frac{d \frac{1}{r'}}{dn'} d\sigma - 4\pi V',$$

quindi

$$(c) \quad \begin{cases} V = \frac{1}{4\pi R} \int V_{\sigma} \left(2R \frac{d \frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r} \right) d\sigma, \\ V' = \frac{1}{4\pi R} \int V_{\sigma} \left(2R \frac{d \frac{1}{r'}}{dn'} - \frac{1}{r'} \right) d\sigma, \end{cases}$$

formole note, di uso molto comodo. Del resto le relazioni (a), (b) sono già state stabilite da Green (*Essay*, art. 10), partendo dallo sviluppo di Laplace.

§ 10. Trasformazioni diverse.

Nella già citata mia Nota del 1877 avevo stabilito la forma delle funzioni associate V e W per ogni distribuzione simmetrica sopra un disco circolare (veggasi anche Betti, p. 158). Quella forma può chiamarsi ellittica, in quanto implica anche le coordinate ellittiche del punto potenziato, mentre quella usata nel presente lavoro può chiamarsi cartesiana, in quanto non implica che le coordinate cartesiane u, z del detto punto.

La verifica *diretta* dell'identità fra le due funzioni (7)_a e quelle della Nota citata richiederebbe calcoli lunghi e prolissi. Ma la considerazione dell'unica funzione U , (7), da cui dipendono le V, W , (7)_a, permette di giungere molto facilmente, con un opportuno artificio, alle forme ellittiche delle stesse due funzioni V, W .

Osserviamo infatti che, in virtù dell'equazione (8), la funzione U può essere primieramente scritta sotto la forma

$$U = 2 \int_0^a F'(t) S dt.$$

Osserviamo inoltre che, eliminando z fra le due equazioni (8)_a, si ha

$$u^2 = (t^2 + S^2) \left(1 - \frac{T^2}{t^2}\right), \quad z^2 = S^2 \frac{T^2}{t^2},$$

donde risulta

$$\frac{u^2}{t^2 + S^2} + \frac{z^2}{S^2} = 1,$$

equazione la quale, ponendo

$$t = a \sqrt{1 - \mu}, \quad S = \lambda \sqrt{1 - \mu},$$

diventa

$$(20) \quad \mu = 1 - \frac{u^2}{a^2 + \lambda^2} - \frac{z^2}{\lambda^2}.$$

Assumendo come variabile d'integrazione μ invece di t , la funzione U diventa al tempo stesso

$$U = a \int_0^1 F'(a \sqrt{1 - \mu}) \lambda d\mu,$$

dove λ è definita, mercè l'equazione (20), in funzione di μ e di u, z .

Ciò premesso, facciamo variare u e z , dando a queste coordinate gli incrementi infinitesimi δu e δz : il corrispondente incremento δU della funzione U sarà dato da

$$\delta U = a \int_0^1 F'(a \sqrt{1 - \mu}) \delta \lambda d\mu,$$

dove $\delta \lambda$ è definito, in virtù dell'equazione (20), il cui primo membro deve mantenersi costante, dall'equazione

$$(20)_a \quad \delta \mu + \frac{d\mu}{d\lambda} \delta \lambda = 0,$$

nella quale si è posto

$$(20)_b \quad \delta \mu = - \frac{2u\delta u}{a^2 + \lambda^2} - \frac{2z\delta z}{\lambda^2}.$$

Ora se si designa con λ_0 la radice positiva (unica) dell'equazione (20) per $\mu = 0$ e se si osserva che, mentre λ cresce da $\lambda = \lambda_0$ a $\lambda = \infty$, la quantità μ cresce da $\mu = 0$ a $\mu = 1$, si scorge che assumendo come variabile d'integrazione λ in luogo di μ , si ha

$$\delta U = a \int_{\lambda_0}^{\infty} F'(a\sqrt{1-\mu}) \delta \lambda \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda;$$

dunque (20)_a

$$\delta U = -a \int_{\lambda_0}^{\infty} F'(a\sqrt{1-\mu}) \delta \mu d\lambda,$$

ossia, (20)_b,

$$\delta U = 2au \delta u \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{F'(a\sqrt{1-\mu}) d\lambda}{a^2 + \lambda^2} + 2az \delta z \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{F'(a\sqrt{1-\mu}) d\lambda}{\lambda^2},$$

equazione dalla quale si trae

$$\frac{dU}{du} = 2au \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{F'(a\sqrt{1-\mu}) d\lambda}{a^2 + \lambda^2}.$$

$$\frac{dU}{dz} = 2az \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{F'(a\sqrt{1-\mu}) d\lambda}{\lambda^2}.$$

Poichè dunque le funzioni (7)_a furono ricavate da U colle formole

$$V = \frac{1}{u} \frac{dU}{du}, \quad W = \frac{dU}{dz},$$

è chiaro che, ponendo

$$(21) \quad F'(a\sqrt{1-\mu}) = \pi a \phi(\mu),$$

esse possono anche esprimersi nel modo seguente

$$(21)_a \quad \begin{cases} V = 2\pi a^2 \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\phi(\mu) d\lambda}{a^2 + \lambda^2}, \\ W = 2\pi a^2 z \int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\phi(\mu) d\lambda}{\lambda^2}, \end{cases}$$

e queste sono appunto le formole stabilite nella Nota citata. Le equazioni (10), (10)_a della presente Memoria si convertono, mercè la formola (21), nelle analoghe equazioni già dimostrate in quel primo scritto per la funzione $\phi(\mu)$. L'attuale deduzione di V, W dalla funzione U venne in altro modo giustificata nella Nota del 1878 *Intorno alle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse* (Atti del R. Istituto Lombardo).

Vi è ancora un'altra forma notevole delle funzioni V, W , forma la quale potrebbe chiamarsi *circolare*, in causa del significato geometrico della nuova variabile d'integrazione che in essa interviene. Pongasi

$$\lambda = a\kappa \sqrt{\frac{\zeta}{c}},$$

dove κ è la nuova variabile anzidetta, c una costante *positiva* e ζ il valore *assoluto* di s . Per tale sostituzione l'equazione (20) si converte nella seguente

$$\mu = \frac{c}{a^2} \left(\frac{a^2}{c} - \frac{u^2}{c + \kappa^2 \zeta} - \frac{\zeta}{\kappa^2} \right),$$

la quale può scriversi anche così:

$$u^2 + \zeta^2 - \left\{ \frac{a^2(1-\mu)\kappa^2}{c} - \frac{c}{\kappa^2} \right\} \zeta = a^2(1-\mu),$$

o più semplicemente, riponendo t al posto di $a\sqrt{1-\mu}$,

$$(22) \quad u^2 + \zeta^2 - \left\{ \frac{t^2 \kappa^2}{c} - \frac{c}{\kappa^2} \right\} \zeta = t^2;$$

e le espressioni (21)_a, riponendo la funzione F al posto di ϕ mediante la relazione (21), diventano similmente

$$(22)_a \quad \left\{ \begin{array}{l} V = 2\sqrt{c\zeta} \int_{\kappa_0}^{\infty} \frac{F'(t) d\kappa}{c + \kappa^2 \zeta}, \\ W = 2 \frac{s}{\zeta} \sqrt{c\zeta} \int_{\kappa_0}^{\infty} \frac{F'(t) d\kappa}{\kappa^2}, \end{array} \right.$$

dove κ_0 è la radice positiva (unica) dell'equazione (22) per $t=a$.

È chiaro che mentre, rispetto alle formole (21)_a, l'equazione $\mu = 0$ rappresenta una famiglia di ellissoidi di rotazione, aventi per comun cerchio focale il solito disco circolare di raggio a ; rispetto invece alle formole (22)_a, l'equazione $t = a$ (trasformata della $\mu = 0$) rappresenta una famiglia di calotte sferiche, tutte terminate all'orlo del disco stesso.

Quando si fa l'inversione rispetto ad un punto dell'asse, lasciando inalterata la circonferenza base di tutte queste calotte (come si è veduto nell'esempio svolto più sopra), esse non fanno che trasformarsi le une nelle altre. In tale inversione giova considerare l'equazione (22) sotto la forma

$$(22)_b \quad u^2 + \left(\zeta + \frac{c}{x^2} \right) \left(\zeta - \frac{t^2 x^2}{c} \right) = 0,$$

La forma circolare (22)_a delle funzioni associate si presta molto opportunamente alla trattazione dei problemi relativi alla calotta sferica. Ma non è mia intenzione di addentrarmi per ora in tale argomento, bastandomi d'aver mostrato il vantaggio che si può ritrarre dall'uso delle funzioni associate, sotto la forma che ho detto cartesiana.



SUI CAMBIAMENTI DI LUNGHEZZA D'ONDA OTTENUTI COLLA ROTAZIONE
D'UN POLARIZZATORE, E SUL FENOMENO DEI BATTIMENTI PRO-
DOTTO COLLE VIBRAZIONI LUMINOSE; PER A. RIGHI.

Riassunto (1).

I.

In un lavoro precedente (2) mi occupai per incidenza di un fenomeno ottico corrispondente a quello acustico dei battimenti, e dimostrai che se si potessero fare interferire due raggi di numeri di vibrazioni poco differenti, invece di ottenere sopra un diaframma le ordinarie frangie d'interferenza immobili, si ve-

(1) Vedi *Mem. dell'Acc. di Bologna*, serie IV, t. IV.

(2) *Nuovo Cimento*, 3. serie, t. III, pag. 212 1878).

fra i due raggi una differenza di fase di un quarto d'onda (in media $d = 0,032$), sarà

$$\frac{d}{o} - \frac{d}{s} = \frac{1}{4N}, \quad \text{da cui} \quad \frac{d}{o} = \frac{d}{s} + \frac{1}{4N}.$$

Per cui η' diviene :

$$\eta' = -a \sin \omega \cos \left[2\pi N \left(t - \frac{d}{s} \right) \right].$$

Indichiamo ora con X ed Y le componenti delle vibrazioni che escono dal sistema girante, secondo gli assi fissi nello spazio. Avremo

$$X = \xi' \cos(\alpha - \omega) - \eta' \sin(\alpha - \omega), \quad Y = \eta' \cos(\alpha - \omega) + \xi' \sin(\alpha - \omega).$$

Mettendo invece di ξ' ed η' i valori trovati, ed adoperando le note formole trigonometriche che servono a trasformare i prodotti di seni e coseni in somme, ed infine ponendo $\omega = 45^\circ$, giacchè supponiamo che il sistema girante sia tale da produrre quando fosse immobile, un raggio circolare, si ottiene facilmente:

$$X = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \left[2\pi N \left(t - \frac{d}{s} \right) + \alpha - 45^\circ \right],$$

$$Y = -\frac{a}{\sqrt{2}} \cos \left[2\pi N \left(t - \frac{d}{s} \right) + \alpha - 45^\circ \right].$$

Ora se il sistema gira uniformemente ad n giri per secondo, l'angolo α varierà in proporzione di t , e potremo porre $\alpha = \alpha_0 + 2\pi n t$. Sostituendo si ha

$$X = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \left[2\pi (N + n) t - \frac{2\pi N d}{s} + \alpha_0 - 45^\circ \right]$$

$$Y = -\frac{a}{\sqrt{2}} \cos \left[2\pi (N + n) t - \frac{2\pi N d}{s} + \alpha_0 - 45^\circ \right].$$

Queste formole rappresentano evidentemente un raggio circolare levogiro di $N + n$ vibrazioni al secondo.

Questo caso, come pure c) ed f), hanno una particolare importanza. La luce che emerge dal sistema girante, è in questi tre casi semplice come la luce incidente, ma di diversa lunghezza d'onda. È indubitabile quindi che qualora si posse-

zimuth della vibrazione, lo spettroscopio deve agire sopra un tal raggio come sopra uno di luce naturale, e dare sempre lo spettro corrispondente al moto vibratorio risultante che ha luogo nell'etere che occupa la fenditura dello strumento. Se con un analizzatore circolare o altrimenti si intercettasse uno dei due raggi circolari certamente allora si avrebbe la riga corrispondente al numero di vibrazioni dell'altro, anzichè quella corrispondente al moto vibratorio risultante.

Ma, ripeto, nei casi *a) c) f)* nei quali la luce che emerge dal sistema girante è semplice, parmi che non possa esservi dubbio, che essa debba refrangersi nel prisma prendendo la direzione corrispondente al numero di vibrazioni quale resta modificato dalla rotazione del nicol e della mica; e se un giorno si potranno ottenere o rotazioni abbastanza rapide o spettroscopi abbastanza potenti, si constaterà uno spostamento delle righe dovuto alla rotazione di un polarizzatore, nello stesso modo che si ha uno spostamento simile dovuto, in virtù del principio di Döppler, al moto relativo della sorgente luminosa e dell'osservatore.

II.

È possibile in varie maniere modificare con polarizzatori giranti, il numero di vibrazioni dei raggi che interferiscono nell'esperienza di Fresnel. Ecco in breve alcune delle disposizioni da me realizzate; per le altre e per i dettagli di tutte, veggasi la memoria completa.

a) I raggi solari polarizzati in modo che le vibrazioni si facciano verticalmente, cadono sulla solita lente cilindrica che li concentra in una lineetta verticale, poi sugli specchi di Fresnel disposti con somma cura onde diano frangie senza diffrazione. Dopo giungono ad una lente acromatica, oltre la quale si producono due immagini coniugate della lineetta focale della lente cilindrica. Se più lontano ancora si pone un diaframma, su di esso appariscono le frangie dovute all'interferenza della luce emessa dalle due sorgenti coniugate suddette. Ma subito al di là di queste vien collocata una lamina di Bravais (formata da due miche d' $\frac{1}{4}$ d'onda, la cui linea di congiunzione è verticale, mentre dalle due parti l'asse delle miche è a 45°), in modo che

due piccole lineette luminose, immagini di quella che si forma nel fuoco della lente cilindrica. Ricevendo ad una distanza sufficiente nell'occhio munito d'un oculare, i raggi emessi dalle due lineette coniugate, si veggono le ordinarie frangie d'interferenza. Ciò posto si ponga davanti ad una metà del biprisma, una lamina di mica di mezz'onda, che deve rimanere fissa, e contro l'altra metà una mica di egual grossezza, ma mobile intorno ad un'asse orizzontale, mentre un piccolo diaframma rettangolare posto verticalmente contro lo spigolo del prisma, nasconde il contorno delle miche. Accadrà allora che i raggi, che abbiamo supposti destrogiri passando per le miche diverranno levogiri; ma mentre quelli che attraversano la mica fissa, conservano la loro lunghezza d'onda, quelli invece che passano per la mica girante, aumenteranno o diminuiranno nel numero delle vibrazioni, secondo il senso della rotazione, come nell'enunciato *f*). I raggi che emettono le due lineette coniugate divengono così atti a produrre non più le frangie immobili, ma le frangie in moto cioè i battimenti.

È degno di nota che in questa esperienza viene modificato uno solo dei due raggi interferenti.

d) Col parallelepipedo di quarzo ideato da Fresnel per mostrare la doppia rifrazione circolare nella direzione dell'asse, e che è costituito da due o tre prismi di quarzo di rotazioni inverse, sono giunto a proiettare delle frangie d'interferenze estremamente belle e vivaci, tali da potere essere viste da molte persone e a molta distanza. Rendendo poi mobile il polarizzatore si hanno le solite frangie mobili. Si può operare in due maniere.

Entri la luce solare da una stretta fessura verticale, e cada sul polarizzatore, quindi sopra una lente convergente che formerà una lineetta brillante, immagine della fessura. Al di là di questa immagine si pone il parallelepipedo e più lungi il diaframma. La luce polarizzata che parte da essa, si scinde entro il parallelepipedo in raggi destrogiri e levogiri diversamente deviati in causa della doppia rifrazione circolare del quarzo. I destrogiri formano (stante la lieve loro divergenza) una certa immagine virtuale della lineetta luminosa ed i levogiri un'altra immagine, quasi come fa il biprisma ordinario. Però, per note ragioni, la luce di queste due immagini non dà frangie d'inter-

... per esempio
... Se poi il polariz-
... le fran-
... i numeri
... differenti.
... secondo
... fornita

... parallelepi-
... del quarzo, e
... sono le velocità

... e V quella
... due immagini
...

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{V} + \frac{1}{V'} \right)$$

... La luce solare
... poi imme-
... lente conver-
... per cadere poi sul dia-
... si trova una po-
... delle magnifiche
... tutte quando la di-
... e la lente, e
... distanze coniugate ri-
... luce parallela
... le frangie che dà
... Babinet. Sono le stesse
... per il suo polarisco-
... erano ancora state otte-
... se si interpone una
... il solito fenomeno delle
...

... la maniera nella quale sono ottenuti
... di vibrazioni, ognuna di
... che qui non sono narrate.

si possa descrivere e spiegare considerando quale deve essere la posizione delle frangie per ogni successiva posizione del corpo girante. Ma un tal modo di interpretare i fenomeni, mentre è spesso più lungo e difficile, è anche meno consentaneo al vero, giacchè difatti, per quanto si è detto è da ritenersi che quando i raggi a lunghezza d'onda alterata, sono stati separati, hanno una esistenza reale, ed un prisma li devierebbe in ragione della lunghezza d'onda modificata.

Queste esperienze realizzano dunque il fenomeno ottico dei battimenti. Esse riescono tutte assai belle, poichè richiamano alla mente la periodicità e la natura vibratoria dei moti dell'etere, nello stesso modo che i battimenti sonori impongono sempre in certo modo l'idea di oscillazioni o di moti alternativi, anche in persone che ignorano la natura dei suoni.



SULLA RELAZIONE DI ALCUNE PROPRIETÀ FISICHE DEGLI AERIFORMI
COL RAPPORTO DEI CALORI SPECIFICI A PRESSIONE COSTANTE ED
A VOLUME COSTANTE; NOTA DI A. VIOLI.

Il calore specifico molecolare di un aeriforme, a volume costante e considerato in condizioni nelle quali più si avvicina allo stato di gas perfetto, per l'ipotesi di Clausius è uguale alla somma dei calori specifici degli elementi semplici componenti (1). Talchè se indichiamo con p , c' , il peso molecolare e il calore specifico dell'aeriforme a volume costante; con n_1, n_2, n_3, \dots ; p_1, p_2, p_3, \dots ; c_1, c_2, c_3, \dots ; rispettivamente i numeri degli atomi, i pesi atomici e i calori specifici degli elementi semplici, avremo

$$pc' = n_1 p_1 c_1 + n_2 p_2 c_2 + n_3 p_3 c_3 + \dots$$

e supponendo che nelle condizioni accennate anche per gli aeriformi il prodotto del calore specifico per il peso atomico dell'elemento semplice sia uguale ad una costante α , e si abbia

$$\alpha = p_1 c_1 = p_2 c_2 = p_3 c_3 = \dots,$$

(1) Berthelot, *Essai de Mécanique Chimique*, t. I, pag. 113, Paris 1879.

184
ponendo

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots$$

il calorico specifico molecolare dell'aeriforme a volume costante sarà espresso da

$$(1) \quad pc' = an.$$

Ma siccome il peso atomico della maggior parte degli elementi semplici è un multiplo di quello dell'idrogeno, la quantità a rappresenterà il calorico specifico atomico dell'idrogeno; per conseguenza *il calore specifico molecolare di un aeriforme, a volume costante e nello stato di gas perfetto, è uguale al calore specifico atomico dell'idrogeno moltiplicato per il numero degli atomi componenti la sua molecola.*

Dalla (1) abbiamo ancora

$$(2) \quad c' = a \frac{n}{p}$$

cioè il calore specifico di un aeriforme, a volume costante e nello stato di gas perfetto, è proporzionale al numero degli atomi della sua molecola, ed è inversamente proporzionale al suo peso molecolare.

Rappresentando ora con c il calorico specifico dell'aeriforme a pressione costante e nello stato di gas perfetto, e chiamando k il rapporto dei due calori specifici di esso a pressione costante, e a volume costante si avrà

$$(3) \quad c = c' k = a \frac{n}{p} k.$$

(Continua)

NECROLOGIA

Nel 15 Settembre scorso morì il Prof. **Plateau** della Università di Gand. Egli si rese celebre colle sue esperienze sulla tensione delle superficie liquide, esperienze descritte nella sua classica opera « *Sulla statica sperimentale e teorica dei liquidi* ». A lui si devono ancora molti pregevoli lavori d'ottica fisiologica, in conseguenza dei quali egli perdè la vista per avere messo troppo alla prova la sensibilità de' suoi occhi. Ma dopo tale sventura il suo figlio Felice e il suo genero G. Van der Mensbrugghe, ambidue Professori all'Università di Gand, eseguivano le esperienze che egli a loro indicava. L'illustre fisico era membro delle principali Accademie Scientifiche di Europa.

BIBLIOGRAFIA

(*Hydrologische Untersuchungen....*). *Ricerche idrologiche sopra il Weser, l' Elba, il Reno ed altri minori fiumi, con applicazioni alla pratica, e teoria relativa a nuovi istrumenti*, per GIOVANNI VON WAGNER Professore a Braunschweig 1881. — Abbenchè questo libro si allontani alquanto dal campo ordinario di questo Giornale, pure, per la sua importanza, abbiám creduto bene di raccomandarlo ai nostri lettori.

(*Die Gas Maschine....*). *Le macchine a gas. Descritte nella loro forma, e modo di agire*, per R. SCHÖTTLER, Braunschweig und Leipzig 1882. — Anche questo è un libro che noi raccomandiamo al lettore. L'A. si è proposto di fare un lavoro, che servisse d'introduzione allo studio del nuovo genere di macchine. È un lavoro riccamente corredato di molte tavole, che contengono i disegni delle macchine Lenoir, Hugon, Bisschop, Barsanti-Matteucci, Gilles, Langen e Otto, Wittig e Hees, Körting-Lieckfeld, Simon ec.

(*Taschenbuch für Chemiker und Hüttenleute*). *Manuale per chimici e fonditori*, pubblicato dalla *Società delle fonderie*. Berlino 1883. — Lo scopo prefissosi dalla *Società delle fonderie* nella pubblicazione di questo Manuale, fu di compilare un libro che a somiglianza dell' « *Des Ingenieurs Taschenbuch* », presentasse agli studiosi della chimica e ai pratici delle fonderie, i metodi, le regole e i risultati più importanti relativi alla loro scienza, nella forma più concisa e più chiara. Il libro contiene una parte relativa alle matematiche, che contiene le formule pei calcoli numerici, algebrici, trigonometrici, per la geometria: lo stesso, relativamente alla statica e alla dinamica dei solidi e dei fluidi. Per la fisica, contiene le formule per le principali determinazioni, con moltissime tavole relative ai pesi ed ai calorigi specifici; così pure per la chimica, comprendendovi le analisi organica elementare e l'analisi spettrale. Segue poi la chimica tecnologica con tutte le indicazioni relative alle varie industrie, ed in special modo a quella delle diverse fonderie. È un volume di circa 1000 pagine in 4.° e di buonissima stampa.

Avvertiamo che il libro, non solamente contiene le formule e i dati necessari per la pratica, ma anche la descrizione dei metodi e degli apparecchi della fisica e della chimica, per quanto può essere utile allo scopo del libro. È per questo che noi raccomandiamo il libro anche a' cultori della fisica e chimica pura.



PROPRIETÀ TERMICHE NOTEVOLI DELL'IODURO D'ARGENTO E DEI CORPI
 PbI_2 , AgI ; Cu_2I_2 , AgI ; Cu_2I_2 , $2AgI$; Cu_2I_2 , $3AgI$; Cu_2I_2 , $4AgI$;
 Cu_2I_2 , $12AgI$; NOTA DEL PROFESSORE M. BELLATI E DEL DOT-
 TORE R. ROMANESE.

Nella classe degli ioduri, forse più che in altre classi di corpi, è frequente il caso che a determinate temperature si presentino delle modificazioni di struttura, accompagnate da fenomeni fisici notevoli. Così i corpi HgI_2 , $2AgI$; HgI_2 , $3AgI$; HgI_2 , Cu_2I_2 , che abbiamo considerati in un precedente lavoro (¹), cangiano di colore a temperature ben definite e contemporaneamente assorbono od emettono una quantità notevole di calore e si dilatano o contraggono in modo affatto anormale. Anche l'ioduro mercurico e quello di piombo presentano anomalie dovute a cangiamenti di struttura. Ma forse il corpo più interessante a questo riguardo è l'ioduro d'argento, il quale presenta il singolare fenomeno di diminuire, anzichè crescere di volume quando venga riscaldato.

Anche altre sostanze in cui sia contenuto l'ioduro d'argento presentano dei fenomeni termici interessanti. Possiamo, ad esempio, citare alcuni clorobromoioduri d'argento, la cui dilatazione fu studiata da Rodwell (²), e tutti quei corpi di cui ci occuperemo nel presente lavoro. In questo la parte sperimentale che veramente ci spetta è quella che riguarda le determinazioni calorimetriche (³): le proprietà generali e la dilatazione termica delle varie sostanze furono invece studiate dal Rodwell in Inghilterra. Noi quì riassumeremo anche le ricerche del fisico inglese, onde rendere più completa l'esposizione delle singolari proprietà termiche di questi corpi. Avvertiamo poi che gli esemplari dei corpi, sui quali abbiamo sperimentato, sono quegli stessi che servirono agli studi del Rodwell e che egli gentilmente ci ha forniti.

(1) *Atti R. Istituto veneto* (1880) (5), VI. — *Nuovo Cimento* (1880) (3), VIII.

(2) *Philosophical Transactions of the Royal Society*. Parte III, 1882.

(3) I risultati delle nostre esperienze furono pubblicati anche nelle *Philos. Transactions of the Royal Society*. Parte III, 1882.

na piccola dilatazione. A -60° l'ioduro d'argento presenterebbe un minimo di densità ⁽¹⁾.

Da -10° a 70° il Rodwell adottò il coefficiente trovato dal Rizeau; da 70° a 142° continua la contrazione che a quest'ultima temperatura si fa più rapida ed è rapidissima fra 148° e $151,3$. A $156,5$ la contrazione si riduce insensibile, e a 163° comincia l'espansione che poi continua fino al punto di fusione. I risultati ottenuti dal Rodwell sono riassunti nelle tabelle seguenti:

Coefficienti medi di dilatazione cubica

fra	0°	e	70° C.	=	—	0,00000417
»	70	»	142	=	—	0,00001749
»	142	»	148	=	—	0,00016363
»	148	»	151,3	=	—	0,00420000
»	151,3	»	153	=	—	0,00120000
»	153	»	156,5	=	—	0,00030000
»	156,5	»	163	=		0,00000000
»	163	»	527	=	+	0,00006921

Volume a	0° C.	=	1,000000
»	124	=	0,998765
»	133	=	0,998608
»	142	=	0,998450
»	148	=	0,997469
»	151,3	=	0,983609
»	153	=	0,981560
»	156,5	=	0,980510
»	163	=	0,980510
»	200	=	0,982377
»	400	=	0,996219
»	527 (solido)	=	1,005008
»	527 (liquido)	=	1,040908

4. Le nostre sperienze calorimetriche sono compendiate nel quadro che segue. In esso Q rappresenta il numero di calorie tolto dall'unità di peso della sostanza raffreddandosi da T a t;

(1) C. R. (1867), LXIV, p. 314, 771.

τ è la temperatura iniziale dell'acqua del calorimetro: si è preso il partito di esporre nel quadro questa temperatura e di omettere la correzione per il differente calore specifico dell'acqua alle diverse temperature, essendo ben noto che la legge di variazione di questo calore specifico è ancora molto incerta.

Ag I

N.°	t	T	Q		Differenza	τ
			osservato	calcolato		
1	15,67	67,68	2,994	2,990	+0,004	14,1
2	14,72	75,28	3,489	3,497	—0,008	12,9
3	14,03	110,68	5,713	5,705	+0,008	11,6
4	14,97	138,66	7,430	7,434	—0,004	11,0
5	20,68	163,15	14,90	14,87	+0,03	13,0
6	19,13	162,7	14,90	14,93	—0,03	11,4
7	21,01	264,0	20,66	20,67	—0,01	11,4
8	22,11	259,5	20,38	20,35	+0,03	11,0
9	21,87	259,7	20,35	20,37	—0,02	11,6

Con questi dati abbiamo calcolato il medio calore specifico dell'ioduro d'argento fra due temperature qualunque t e T inferiori a 142° , il calore specifico c , per temperature superiori 163° , e il calore di trasformazione λ supponendo che il cambiamento di struttura avvenga a 150° . Per calore di trasformazione intendiamo la quantità di calore assorbita od emessa dall'unità di peso del corpo nel cambiamento di struttura, supposto che la temperatura rimanga costante.

$$c = 0,054389 + 0,0000372 (T + t),$$

$$c_1 = 0,0577,$$

$$\lambda = 6,25.$$

Nel quadro precedente sono indicate le differenze fra i valori calcolati e gli osservati.

Come si vede, il calore specifico c dell'ioduro d'argento cresce abbastanza rapidamente al crescere della temperatura quantunque il volume diminuisca. Avvenuto il cambiamento di struttura, il calore specifico c_1 ha un valore più piccolo di quello che, a temperature corrispondenti, si dedurrebbe dalla form

rappresentante *c*. Il cangiamento di struttura, che avviene fra 142° e 163° , è accompagnato da una notevole contrazione e da un grande assorbimento di calore. Questo calore di trasformazione, impiegato unicamente a fare il lavoro molecolare relativo al cangiamento di struttura, è tanto, che basterebbe a riscaldare il corpo di oltre 90° .

5. Altri fenomeni accompagnano la modificazione di struttura. Uno di noi, insieme al Dott. G. Faè, aveva già avviata e portata molto innanzi una serie d'esperienze sulla conducibilità elettrica dell'ioduro d'argento, quando nel dicembre dello scorso anno comparve negli *Annali di Wiedemann* un lavoro di W. Kohlrausch sopra lo stesso argomento ⁽¹⁾. Siccome i risultati a cui eravamo giunti concordano pienamente con quelli più completi del Kohlrausch, crediamo inutile di riferire le nostre esperienze. Ci limitiamo a riassumere brevemente questi risultati.

Partendo da 700° e venendo a temperature più basse, la resistenza elettrica dell'ioduro d'argento va continuamente crescendo senza accennare ad alcun salto dovuto alla fusione; ma quando la struttura del corpo da amorfa diventa cristallina, la resistenza si fa grandissima e continua poi a crescere con grande rapidità quando la temperatura diminuisce. La curva che rappresenta la resistenza di questo corpo in funzione della temperatura fa dunque un gomito intorno a 150° . Per il cloruro ed il bromuro d'argento, questo gomito si presenta invece al punto di fusione.

Ecco i valori trovati dal Kohlrausch per la resistenza specifica dell'ioduro d'argento, presa eguale ad *uno* quella del mercurio.

(1) *Das electrische Leitungsvermögen von Chlorsilber, Bromsilber und Jodsilber.*
— *Wied. Ann.* XVII, p. 642.

Temperatura	$r \cdot 10^{-3}$	Temperatura	$r \cdot 10^{-3}$
700°	4,2	150,7°	30
650	4,5	149,1	50
600	4,7	147,1	100
550	4,9	145,9	150
500	5,0	145,2	200
450	5,12	143	500
400	5,4	140,6	1000
350	5,8	139,4	2000
300	6,25	138,7	5000
250	6,8	138	10000
200	8,1	134	20000
160	8,75	131	50000
156	10	124	100000
153,6	15	114	200000
152	20	107	500000
		86	1000000

La soluzione d'acido solforico di massima conducibilità ha la resistenza $r \cdot 10^{-3} = 14,5$; l'ioduro d'argento allo stato amorfo conduce dunque meglio di questa e di altre soluzioni elettrolitiche alla temperatura ordinaria. Anche l'ioduro d'argento conduce *elettroliticamente* a qualsiasi temperatura. Di ciò si sono accertati il Braun ed il Kohlrausch. Noi possiamo anzi aggiungere che operando con elettrodi d'argento a temperatura un po' alta, per es. a 100°, ed usando soltanto sei coppie Leclanché, la decomposizione elettrolitica dell'ioduro d'argento è assai manifesta. Intorno al catodo si formano dei depositi filamentosi d'argento, i quali si protendono verso l'anodo, facendo così diminuire molto sensibilmente la resistenza dell'ioduro d'argento assoggettato all'esperienza.

6. **PbI₂, PbI, AgI.** — L'ioduro di piombo, PbI₂, presenta anch'esso qualche singolarità nella dilatazione. Fra 0° e 205° il coefficiente medio di dilatazione cubica è 0,00007614; da 205° a 253° è 0,00008317; poi fra 253° e 265° ha luogo una grande espansione corrispondente a un coefficiente 0,0006378, e infine la dilatazione continua rapida con un coefficiente 0,000180. A 383° avviene la fusione e nel passaggio dallo stato solido al liquido si ha una espansione eguale a circa $\frac{3}{100}$ del volume a zero. Il calore specifico del PbI₂ è, secondo Regnault, 0,04267.

Il corpo $PbI_2 \cdot AgI$ contiene circa 66,21 p. % di ioduro di piombo e 33,79 di ioduro d'argento, ossia circa 29,7 p. % di piombo, 15,6 d'argento e 54,7 di iodio. Col riscaldamento, fino a 118° si ha espansione; da 118° a 124° non osservasi alcuna variazione di volume; a quest'ultima temperatura comincia la contrazione che dura fino a 139°. Poi fino a 144° non si ha sensibile variazione di volume, e infine subentra di nuovo una dilatazione che è maggiore di quella fra 0° e 118° e va rapidamente crescendo colla temperatura. La fusione ha luogo a 350°, cioè a temperatura notevolmente più bassa di quella a cui fondono l'ioduro d'argento e l'ioduro di piombo. Il peso specifico è 5,923. Ecco i risultati delle esperienze del Rodwel.

Fra	0°	e	118° C.	= + 0,0000306
»	124	»	128	= — 0,0003240
»	128	»	130	= — 0,0012990
»	130	»	131	= — 0,0017330
»	131	»	133	= — 0,0039000
»	133	»	139	= — 0,0004329
»	144	»	150	= + 0,0001150
»	150	»	350	= + 0,000144

Volume a	0° C.	= 1,000000
»	118	= 1,003610
»	124	= 1,003610
»	128	= 1,002314
»	130	= 0,999716
»	131	= 0,994517
»	133	= 0,986717
»	139	= 0,984120
»	144	= 0,984120
»	150	= 0,984810
»	300	= 1,006500
»	350 (solido)	= 1,013790
»	350 (liquido)	= 1,024370

La tabella seguente riassume i risultati delle nostre esperienze calorimetriche.

$PbI_2 \cdot AgI$

N.°	t	T	Q		Differenza	τ
			osservato	calcolato		
10	12,65	65,82	2,566	2,558	+0,008	11,7
11	10,75	62,56	2,484	2,491	-0,007	9,9
12	11,93	113,0	4,909	4,904	-0,005	10,2
13	13,45	112,9	4,815	4,823	-0,008	11,8
14	13,75	171,1	10,531	10,529	+0,002	10,2
15	15,66	171,4	10,455	10,456	-0,001	12,2
16	15,09	242,4	14,52	14,51	+0,01	10,5
17	13,90	242,0	14,52	14,54	-0,02	9,3

$$c = 0,047458 + 0,00000839 (T + t),$$

$$c_1 = 0,0567,$$

$$\lambda = 2,556.$$

È degno di nota, che questo corpo possiede eguale densità a tre differenti temperature, per esempio a 0°, a 130, e a 150° circa. La contrazione rapida, che nell'ioduro d'argento comincia solo a 142°, nel $PbI_2 \cdot AgI$ comincia a 124° e finisce a 139°. Questa contrazione poi è maggiore di quella dell'ioduro d'argento, sebbene nel $PbI_2 \cdot AgI$ l'ioduro d'argento entri solo per un terzo circa del peso.

Invece il calore di trasformazione è assai minore per il $PbI_2 \cdot AgI$, che per l'ioduro d'argento. Moltiplicando il calore di trasformazione dell'ioduro d'argento per il peso dello stesso ioduro contenuto nell'unità di peso di $PbI_2 \cdot AgI$, si ottiene 2,11 in luogo di 2,56, che è il valore di λ dedotto dall'esperienza. La differenza di questi due numeri non è molto grande, ma si vede che nel cangiamento di struttura del $PbI_2 \cdot AgI$ viene assorbita una quantità di calore più grande di quella che compete all'ioduro d'argento in quello contenuto. Se per il $PbI_2 \cdot AgI$ si calcola il calore specifico medio fra 0° e 100°, partendo dai calori specifici e dalle proporzioni del PbI_2 e del AgI , si trova 0,0478: la formola empirica desunta dall'esperienze dà 0,0483. Ma se si tenta di ricavare i valori della dilatazione termica del $PbI_2 \cdot AgI$ basandosi sulla dilatazione e sulle proporzioni dei due ioduri che lo compongono, si arriva a valori affatto diversi da quelli osservati.

Il valore di c , è maggiore del valore di c desunto dalla formula, estesa oltre i limiti di temperatura entro i quali fu calcolata.

Il Rodwell unì l'ioduro di piombo all'ioduro d'argento anche in altre proporzioni, ma in generale i corpi ottenuti erano troppo fragili per poterli assoggettare ad esperienze.

7. $\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot \text{AgI}$; $\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot 2\text{AgI}$; $\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot 3\text{AgI}$; $\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot 4\text{AgI}$; $\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot 12\text{AgI}$. — L'ioduro di rame, che servì a preparare gli altri corpi, fu ottenuto col metodo di Souberain, versando una soluzione di ioduro potassico in una soluzione di solfato ferroso e di solfato di rame. L'ioduro di rame fu poi lavato con acido solforico diluito e con acqua, quindi fu essiccato a 200° . Esso fonde a 601° ed ha la densità 5,6936. Riscaldato all'aria a temperatura superiore a 230° lascia sfuggire lentamente l'iodio e si converte in ossido. La sua dilatazione è regolare, almeno fino a 300° ; il coefficiente medio è 0,00007317. Il suo calore specifico medio fra 13° e 65° è 0,0684, e fra 13° e 148° è 0,0686. Il calore specifico cresce dunque molto lentamente. Tuttavia diamo questi numeri con qualche riserva, perchè il corpo sul quale abbiamo sperimentato era coperto da uno straterello d'ossido.

Fondendo insieme, in opportune proporzioni, dell'ioduro di rame e dell'ioduro d'argento, si prepararono i seguenti corpi:

$\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot \text{AgI}$; $\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot 2\text{AgI}$; $\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot 3\text{AgI}$; $\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot 4\text{AgI}$; $\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot 12\text{AgI}$.

Alcuni dati relativi a queste sostanze sono riuniti nel seguente prospetto.

	$\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot \text{AgI}$	$\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot 2\text{AgI}$	$\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot 3\text{AgI}$	$\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot 4\text{AgI}$	$\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot 12\text{AgI}$
Percento di Cu_2I_2	61,78	44,69	35,01	28,78	11,87
» AgI	38,22	55,31	64,99	71,22	88,13
» Cu	20,55	14,86	11,66	9,58	3,95
» Ag	17,54	25,39	29,83	32,70	40,48
» I	61,91	59,74	58,51	57,72	55,57
Punto di fusione.	514°	496°	494°	493°	513°
Peso specifico	5,7302	5,7225	5,7160	5,7064	5,6950

Qui sotto riassumiamo alcune indicazioni relative ai singoli corpi e i risultati delle misure eseguite sopra ciascuno di essi.

a). $Cu_2I_2.AgI$. — È di color bruno, ma ridotto in polvere è d'un bel color giallo. In istrati sottili è trasparente e giallo. Ha frattura resinosa. Non è alterato dalla luce.

Coefficienti medi di dilatazione cubica

da	0°	a	223° C.	0,00004998
»	223	»	256	0,00001999
»	256	»	284	0,00000000
»	284	»	309	0,00003999
»	309	»	319	0,00000000
»	319 in su			0,00016665

Volume a	0° C.	= 1,000000
»	100	= 1,004998
»	200	= 1,009996
»	223	= 1,011145
»	256	= 1,011804
»	284	= 1,011804
»	309	= 1,010805
»	319	= 1,010805
»	400	= 1,024303
»	500	= 1,040968
»	punto di fusione (514°) solido.	= 1,043301
»	» (514°) liquido	= 1,103307

$Cu_2I_2.AgI$

N.°	t	T	Q		Differenza	τ
			osservato	calcolato		
18	11,66	63,59	3,378	3,378	0,00	10,4
19	15,05	231,1	15,05	15,02	+0,03	9,2
20	15,46	229,2	14,81	14,85	—0,04	9,7
21	20,19	333,0	31,29	31,28	+0,01	8,1
22	22,26	332,7	31,11	31,12	—0,01	10,3

$c = 0,063099 + 0,0000260 (T + t),$
 $\lambda = 8,67.$

b). $Cu_2I_2 \cdot 2AgI$. — Presenta gli stessi caratteri del $Cu_2I_2 \cdot AgI$; solo è più fragile.

Coefficienti medi di dilatazione cubica

da 0°	a 221° C.	0,00003750
» 221	» 233	0,00000000
» 233	» 298	— 0,00010587
» 298 in su		+ 0,00009474

Volume a 0° C.	= 1,000000
» 221	= 1,008287
» 233	= 1,008287
» 298	= 1,001406
» 300	= 1,001595
» 400	= 1,011069
» punto di fusione (496°) solido	= 1,020164
» » (496°) liquido.	= 1,062958

$Cu_2I_2 \cdot 2AgI$

N.°	t	T	Q		Differenza	τ
			osservato	calcolato		
23	11,70	63,86	3,299	3,300	—0,001	10,6
24	13,10	64,06	3,227	3,226	+0,001	12,0
25	13,36	209,4	13,23	13,26	—0,03	8,7
26	15,12	209,3	13,17	13,14	+0,03	10,5
27	20,85	305,7	27,99	28,01	—0,02	11,3
28	18,24	306,9	28,29	28,27	+0,02	8,5

$c = 0,061035 + 0,0000295 (T + t),$
 $\lambda = 7,88.$

c). $Cu_2I_2 \cdot 3AgI$. — Differisce nei caratteri dai corpi precedenti solo perchè è più fragile.

Coefficienti medi di dilatazione cubica

da	0°	a	177° C. *	0,00002307
»	177	»	194	0,00001285
»	194	»	214	0,00000000
»	214	»	280	— 0,00017424
»	280 in su			+ 0,00009474

Volume a	0° C.	= 1,000000
»	177	= 1,004083
»	194	= 1,004301
»	214	= 1,004301
»	280	= 0,992902
»	300	= 0,994796
»	400	= 1,004270
»	punto di fusione (494°) solido	.	= 1,013225
»	»	(494°) liquido.	= 1,081637

Cu₂I₂.3AgI

N.°	t	T	Q		Differenza	τ
			osservato	calcolato		
29	14,48	60,59	2,846	2,846	0,000	13,7
30	13,85	179,12	10,781	10,747	+0,034	10,4
31	11,88	179,63	10,867	10,901	—0,034	8,4
32	17,00	290,0	26,27	26,27	0,000	8,7
33	19,31	289,9	26,13	26,13	0,000	11,2
34	20,28	338,3	29,59	29,58	+0,01	10,9
35	19,30	343,2	29,99	30,00	—0,01	9,8

$c = 0,059624 + 0,00000280 (T + t) ,$
 $c_1 = 0,0726 ,$
 $\lambda = 7,74 (a\ 240^{\circ}) .$

d) Cu₂I₂.4AgI. — Somiglia al precedente, ma è ancora più fragile, e la frattura è leggermente cristallina.

Coefficienti medi di dilatazione cubica

da	0°	a	159° C.	0,00001999
»	159	»	180	0,00001056
»	180	»	199	0,00000000
»	199	»	213	— 0,0000720
»	213	»	234	— 0,0003798
»	234	»	282	— 0,0000720
»	282 in su			+ 0,0002050

Volume a	0° C.	= 1,000000
»	159	= 1,003180
»	180	= 1,003296
»	199	= 1,003296
»	213	= 1,002288
»	234	= 1,994313
»	282	= 1,990857
»	300	= 1,994547
»	400	= 1,015047
»	punto di fusione (493°)	solido .	= 1,034112
»	»	(350°) liquido.	= 1,065601

Cu₂I₂. 4 Ag I

N.°	t	T	Q		Differenza	τ
			osservato	calcolato		
36	15,47	98,94	5,129	5,110	+0,019	13,8
37	15,61	102,29	5,298	5,319	—0,021	13,9
38	16,83	173,72	10,093	10,094	—0,001	13,6
39	15,91	168,25	9,764	9,761	+0,003	12,8
40	17,67	293,5	26,62	26,57	+0,05	9,0
41	20,07	295,5	26,52	26,57	—0,05	11,6
42	20,91	339,9	29,58	29,64	—0,06	11,4
43	21,61	337,6	29,49	29,44	+0,05	12,2

$c = 0,056526 + 0,0000410 (T + t) ,$
 $c_1 = 0,0702 ,$
 $\lambda = 7,95 \text{ (a } 230^{\circ} \text{)} .$

e) Cu₂I₂. 12 AgI. — Quando è in pezzi ha color giallo-verde; in strati sottili è giallo e trasparente; in polvere è di un giallo

meno brillante di quello dei corpi precedenti. Ha frattura cristallina. È meno fragile dell'ioduro d'argento.

Coefficienti medi di dilatazione cubica

da	0°	a	124° C.	0,00000636
»	124	»	153	. . :	0,00000000
»	153	»	168	— 0,0000831
»	168	»	225	— 0,0002890
»	225	in su		+ 0,0000667

Volume a	0° C.	= 1,000000
»	124	= 1,000788
»	153	= 1,000788
»	168	= 0,998985
»	225	= 0,982512
»	300	= 0,987511
»	400	= 0,994177
»	500	= 1,000843
»	502 (solido)	= 1,000976
»	502 (liquido)	= 1,042612

Cu₂I₂ . 12 Ag I

N.°	t	T	Q		Differenza	τ
			osservato	calcolato		
44	15,13	88,51	4,321	4,316	+0,005	12,7
45	16,69	88,81	4,238	4,242	—0,004	14,3
46	23,67	233,2	20,53	20,58	—0,05	12,2
47	24,00	234,3	20,67	20,62	+0,05	12,5
48	26,27	338,4	26,56	26,52	+0,04	11,5
49	24,81	327,9	25,97	26,00	—0,03	10,4

$c = 0,05882$ (medio da 16° a 89°) ,
 $c_1 = 0,0580$,
 $\lambda = 7,55$ (a 190°) .

Abbiamo determinato soltanto il calore specifico medio di questo corpo fra 16° e 89°, perchè nelle avvertenze con cui il Rodwell ci aveva accompagnati i corpi, veniva erroneamente indicata la temperatura di 95° come quella a cui incomincia la trasformazione del corpo, mentre invece risulta dalla pubblicazione posteriore del Rodwell che questa temperatura è di 124°.

8. Non sarà forse inutile aggiungere alcune considerazioni sui risultati precedenti. La prima tabella del § 7 mostra che, sebbene le proporzioni del Cu_2I_2 e dell' AgI sieno molto differenti, la quantità complessiva di iodio varia solo entro limiti ristretti, cioè fra 55,57 e 61,91. La medesima tabella mostra che la temperatura di fusione varia pochissimo da un corpo all'altro ed è sempre inferiore a quella del Cu_2I_2 e dell' AgI . Del pari varia pochissimo il peso specifico, e in ogni caso supera quello dei due ioduri componenti. Coi pesi specifici del Cu_2I_2 e dell' AgI si può calcolare per i singoli corpi Cu_2I_2 , AgI , $\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot 2\text{AgI}$, ec. la contrazione $\frac{a-b}{a}$, dove a è il volume che competerebbe al corpo se non avvenisse alcuna diminuzione di volume, e b è il volume effettivo del corpo. Questa contrazione, per i corpi da noi considerati, va diminuendo al crescere del per cento di AgI . Infatti si trova

	$\frac{a-b}{a}$
$\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot \text{AgI}$	0,0076
$\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot 2\text{AgI}$	0,0068
$\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot 3\text{AgI}$	0,0060
$\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot 4\text{AgI}$	0,0046
$\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot 12\text{AgI}$	0,0031.

Seguendo la dottrina di molti chimici, pare dunque che l'unione fra l'ioduro di rame e quello d'argento sia più intima nel $\text{Cu}_2\text{I}_2 \cdot \text{AgI}$, che in ciascuno degli altri corpi.

La struttura è essenzialmente cristallina nel Cu_2I_2 e nell' AgI . Invece nei corpi che risultano dall'unione di questi due ioduri, la struttura comincia ad essere cristallina solo quando la proporzione di AgI è maggiore del 65 p. %.

**SULLA RELAZIONE DI ALCUNE PROPRIETÀ FISICHE DEGLI AERIFORMI,
COL RAPPORTO DEI CALORI SPECIFICI A PRESSIONE COSTANTE ED
A VOLUME COSTANTE; NOTA DI A. VIOLI (¹).**

Il valore del rapporto k di diversi aeriformi, Masson, Cazin, Kundt, Warburg ed altri lo dedussero dalla velocità di propagazione del suono. Maxwell e Watson generalizzarono alcuni teoremi di Boltzmann; e considerando la molecola come un sistema di punti materiali, la cui configurazione e posizione nello spazio sia determinata da m variabili indipendenti, trovarono (²)

$$(4) \quad k = 1 + \frac{2}{m(1+h)}$$

essendo h il rapporto fra il calore impiegato nel lavoro interno delle forze che tengono insieme i punti del sistema e il calore che accresce la forza viva totale. Il rapporto dei due calori specifici a pressione costante e a volume costante è adunque dipendente dal concetto che noi ci formiamo sulla costituzione della molecola, potendo essa essere concepita come un corpo rigido o come un sistema di punti materiali tenuti insieme da forze variabili con le distanze. Infatti il prof. Boltzmann abbandonando questo concetto ultimo, considera le molecole come corpi rigidi; allora $h=0$; ed il rapporto dei due calori specifici si riduce a

$$k = 1 + \frac{2}{m}$$

espressione che dà i valori di $k = \frac{5}{3}$; 1.4; $\frac{4}{3}$, facendovi rispettivamente $m = 3$; 5; 6. Nel 1° caso la molecola si riduce ad un punto o ad una sfera rigida la cui posizione è determinata dalle 3 coordinate del centro; nel 2° la molecola è concepita da Boltzman come un sistema di due o più atomi sferici invariabil-

(1) *Continuazione e fine.* Vedi pag. 183.

(2) *Pogg. Ann.*, fascicolo di gennaio 1877. — A. Roiti; *Sulla propagazione del suono nella odierna teoria degli aeriformi*; Memoria pubblicata negli atti della *R. Accademia dei Lincei*, Vol. I, Serie 3. Classe di scienze fisiche ecc. 1877.

allora la (4) ci dà

$$(5) \quad k = 1 + \frac{2}{(2n+1)(1+h)}$$

e per questo valore ricaviamo dalla (3)

$$(6) \quad c = a \frac{n}{p} \left(1 + \frac{2}{(2n+1)(1+h)} \right).$$

Il calore specifico dell'aeriforme a pressione costante resta ancora indeterminato non conoscendo il valore del rapporto del calore impiegato nel lavoro interno delle forze che tengono insieme gli atomi a quello che accresce la forza viva totale. Ma per molecole biatomiche, come quella dell'idrogeno, il lavoro delle forze interatomiche deve essere una quantità da potersi facilmente trascurare senza commettere un grave errore; e valendosi delle determinazioni di Regnault il quale trovò che il calorico specifico dell'idrogeno a pressione costante e nelle condizioni normali è uguale a 3,409, ponendo questo valore nella (6) e facendovi $h = 0$, $n = 2$, $p = 2$, il calore specifico atomico dell'idrogeno sarà

$$a = 2,435$$

valore pochissimo differente da quello che si otterrebbe, se dalla quantità di calore necessaria a riscaldare un chilogrammo di idrogeno di un grado di temperatura, a pressione costante, si togliesse la quantità di calore corrispondente al suo lavoro di espansione, e conferma quanto fu premesso antecedentemente.

Con le relazioni già stabilite possiamo giungere alla determinazione dell'equivalente dinamico della caloria e del valore h che rende indeterminate le quantità k e c . Infatti abbiamo

$$\frac{c}{c'} = 1 + \frac{2}{(2n+1)(1+h)}$$

e per il primo teorema della termodinamica

$$c - c' = \frac{2 \alpha P}{\delta p E}$$

essendo P il peso in chilogrammi della pressione esercitata dalla atmosfera sull'unità di superficie, δ il peso di un litro d'idro-

geno nelle condizioni normali, p il peso molecolare dell'aeriforme, α il coefficiente di dilatazione dell'aria, ed E l'equivalente dinamico della caloria. Ricavando il valore di E dalle due equazioni precedenti, sostituendo a c il valore dato dalla (6) otterremo:

$$E = \frac{\alpha P}{\alpha \delta} \cdot \frac{(2n+1)(1+h)}{n};$$

e facendovi $\alpha = \frac{1}{273} P = 10333$, $a = 2,435$, $\delta = 0,08958$, si avrà =

$$(7) \quad E = 173,522 \frac{(2n+1)(1+h)}{n}.$$

Ma l'equivalente dinamico della caloria è una quantità costante, e questa condizione sarà soddisfatta dalla (7) se poniamo

$$h = \frac{n-2}{2(2n+1)},$$

poichè allora

$$E = 173,522 \cdot \frac{3}{2} = 433,805;$$

valore un po' superiore a quello medio trovato nelle più recenti determinazioni sperimentali. Le espressioni (6) e (5) si riducono alle seguenti:

$$c = a \frac{n}{p} \left(1 + \frac{4}{5n} \right)$$

$$(8) \quad k = 1 + \frac{4}{5n}$$

e quest'ultima conferma quanto il prof. Roiti osservò pel primo cioè il rapporto dei due calori specifici a pressione costante e a volume costante degli aeriformi, è costante per tutti quelli ai quali i chimici attribuiscono molecole di uno stesso numero di atomi, e variabile al variare di questo numero.

Passiamo ora a determinare la relazione fra la velocità teorica del suono v , la velocità molecolare u ed il valore medio k' del rapporto dei due calori specifici dell'idrogeno e l'aeriforme considerato.

Alcuni distinti fisici anni indietro si occuparono della propagazione del suono nella odierna teoria degli aeriformi. Il pro-

Il professor Stefan seguendo il concetto di Krönig che le molecole sieno distribuite in cubi uguali ed egualmente orientati, per modo che in ogni cubo si muovino tre molecole nella direzione dei tre lati, ammettendo che la velocità del suono debba essere uguale alla velocità molecolare presa nella direzione della diagonale del cubo, e ritenendo con Clausius

$$u = 279,9 \sqrt{3 \frac{1 + \alpha t}{\delta}}$$

essendo t la temperatura e δ la densità, nelle condizioni normali, dell'aeriforme ottenne l'espressione

$$v' = \frac{u}{\sqrt{3}}$$

identica a quella di Newton e corrispondente ai risultati sperimentali se si moltiplica per \sqrt{k} come suggerì Laplace.

Il prof. Roiti in un suo interessante lavoro (1) espone due ipotesi per dedurre un'espressione della velocità di propagazione del suono che più si avvicinasse alla formola di Laplace. Nella prima ipotesi suppone le molecole animate da moto rettilineo uniforme, fra due urti consecutivi, e considera una massa gassosa talmente densa ed estesa da poter ritenere come infinito il numero delle molecole contenute in uno spazio finito, e come infinitamente piccola la distanza media che ciascuna molecola percorre fra un urto e il successivo. Talchè gl'impulsi comunicati dal corpo sonoro alle molecole che gli sono in contatto verranno da queste comunicati mediante gli urti ad altrettante molecole prossime, e così via via ad altrettante più lontane, talmente che verranno trasportati in ogni direzione. E per calcolare il tempo che impiega ad arrivare un impulso da un punto A ad un punto B qualunque dello spazio, il prof. Roiti suppone che quell'impulso provochi una variazione trascurabile nella velocità molecolare, osserva che esso si trasmetterà per un cammino che cambierà di direzione ad ogni urto, ed ammette che

(1) A. Roiti. *La velocità teorica del suono e la velocità molecolare dei gas*. Memoria pubblicata negli *Atti della R. Accademia dei Lincei*, Vol. I, Serie 3. Classe di scienze fisiche ec. 1876.

colare è esattamente uguale a $\frac{\sqrt{5}}{3}$; nel maggior numero dei gas la velocità del suono è alquanto minore, e il Preston ritiene che ciò debba attribuirsi ai moti rotatori prodotti negl' incontri delle molecole (1).

I valori teorici del rapporto $\frac{v}{u}$ ottenuti con i vari processi esposti differiscono fra loro, con i valori trovati sperimentalmente. E senza aver la pretesa di esporre una nuova teoria su questo interessantissimo soggetto, mi permetterò di osservare che moltiplicando per il valore medio k' , del rapporto dei due calori specifici dell'idrogeno e l'aeriforme considerato, la velocità teorica di propagazione del suono ottenuta dal prof. Roiti nella sua prima ipotesi (9) si ha:

$$V = k'v = \frac{u}{2} k = 242,4 k' \sqrt{\frac{1 + \alpha t}{\delta}};$$

e per l'idrogeno ricavando dalla (8) $k = 1,4$; sarà

$$(10) \quad k' = \frac{1,4 + \frac{5n+4}{5n}}{2} = \frac{6n+2}{5n}$$

e per conseguenza si avrà l'espressione

$$(11) \quad V = 242,4 \frac{6n+2}{5n} \sqrt{\frac{1 + \alpha t}{\delta}};$$

che dà dei risultati assai concordi con l'esperienza, come lo provano i valori calcolati per i seguenti aeriformi.

AERIFORMI	Formola molecol.	n	δ	v_1	V	k'	k_1
Mercurio	Hg	1	6,92600	137,3	147,4	1,600	1,667
Idrogeno	H ₂	2	0,06926	1269,2	1291,1	1,400	1,410
Ossido di carbonio.	CO	2	0,96964	337,4	344,6	1,400	1,410
Aria	N, O	2	1,00000	332,8	339,4	1,400	1,410
Ossigeno.	O ₂	2	1,10816	317,0	322,7	1,400	1,410
Protossido di azoto	N ₂ O	3	1,52372	261,8	261,8	1,333	1,285
Anidride carbonica	CO ₂	3	1,52372	261,5	261,8	1,333	1,291
Etileno	C ₂ H ₄	6	0,96964	313,9	311,9	1,267	1,257

(1) Vedi Memoria citata del Prof. Roiti. *Sulla propagazione del suono nella odierna teoria degli aeriformi.*

INTORNO AD UN SINGOLARE EFFETTO MECCANICO DELLA SCARICA
ELETTRICA; NOTA DEL PROF. EMILIO VILLARI.

Sono ben note ai fisici le grandi difficoltà che s'incontrano a perforare o schiantare delle sottili lastre di vetro per mezzo della scintilla elettrica, imperocchè questa, assai più facilmente che romperle, striscia sulla loro superficie. Perciò l'Holtz, per primo, e quindi il Terquem ed il Trannin costruirono degli apparecchi appropriati per forare con la scarica grosse lastre di vetro, che preparavano con gran cura e diligenza.

Io ho fatto l'osservazione, che le lastre di specchio argentate si schiantano con grande facilità, quando poderose scariche elettriche le investono, e ne percorrono la superficie metallizzata. Lo stesso però non accade con gli specchi ad amalgama di stagno, per ragioni che dirò in seguito. Adoperai perciò in queste esperienze delle lastre di specchio argentate più o meno spesse, e generalmente molto piccole, che disponevo verticalmente fra gli elettrodi in fili di platino di uno spinterometro. Al momento della scarica di una opportuna energia, la lastra il più delle volte si spezzava in sottili frantumi. Qui di seguito verrò accennando i risultati più cospicui da me ottenuti in queste esperienze.

Una lastra argentata di circa 9 cm. q. di superficie, e grossa 3^{mm} si ruppe con una scarica di 32 unità (¹) impartite ad 8 bottiglie.

Una seconda lastra di 3^{mm},7 di spessore e larga 52^{mm} si ruppe per la scarica di 36 unità, impartite ad 8 bottiglie (²).

Per lo contrario, una lastra grossa 3^{mm} e larga 30^{mm} resistette ad una scarica di 18 unità in 4 bottiglie, che perciò erano allo stesso potenziale delle precedenti; ma essa lastra si ridusse

(1) Le unità qui citate erano misurate da una bottiglia elettrometrica di 114^{mm} di diametro, con una armatura esterna alta 165^{mm}, la quale bottiglia produceva scintille di 5^{mm} di lunghezza fra due palline di 22^{mm},2 di diametro.

(2) Le bottiglie da me adoperate erano cilindriche, alte 50 cm., di 13 cm. di diametro, e poi due terzi della loro altezza rivestite di stagnola.

in diverso numero di bottiglie, e perciò a diverso potenziale ed in una seconda serie sperimentai a potenziali costanti, ma con cariche e numero di bottiglie diverse, ed osservando le condizioni nelle quali le lastrine si ruppero ottenni i dati che seguono.

I. SERIE			II. SERIE		
<i>Carica costante: 24 unità</i>			<i>Potenziali costanti</i>		
N.° di Bottiglie	La lastra Si ruppe		N.° di Bottiglie	Carico	La lastra Si ruppe
16	Si ruppe		18	6	Si ruppe
16	"	"	15	5	
18	"	Non si ruppe	15	5	"
18	"	Si ruppe poco	15	5	"
18	"	Non si ruppe	12	4	Non si ruppe
20	"	"			"
20	"	"			
18	"	"			
18	"	"			

La I. Serie mostra, che la costante carica di 24 unità, accumulata in 20 bottiglie non fu mai sufficiente a schiantare le lastrine; ma distribuita in 18 bottiglie, qualche volta, sebbene malamente, ne spezzò qualcuna; ed impartita invece a sole 16 bottiglie, sempre e nettamente le spezzò in più parti. La II. Serie poi mostra, che a potenziale costante il vetro non si ruppe con la scarica di 12 unità in 4 bottiglie; invece qualche volta si rompeva, ma appena, con la scarica di 15 unità in 5 bottiglie, mentre che le lastrine si rompevano sempre e completamente con la scarica di 18 unità comunicate a 6 bottiglie. Laonde, come si era detto, queste azioni dipendono dal potenziale e dalla quantità di elettricità della carica che le producono.

Analoghi esperimenti ripetei interponendo verticalmente fra gli elettrodi dello spinterometro due lastrine di specchio quadro grosse 3^{mm},5 ciascuna e di 30^{mm} di lato; le quali erano a contatto con le loro faccie di vetro, avevano esterne quelle argentate, e su di esse faceva strisciare la scintilla della scarica, variabile pel potenziale in una prima serie di esperienze, e per la quantità in una seconda serie, ed i risultati che così ottenni sono qui di seguito riportati.

I. SERIE		II. SERIE		
<i>Carica costante : 40 unità</i>		<i>Potenziale costante</i>		
N.° di Bottiglie	2 lastrine	N.° di Bottiglie	Cariche	2 lastrine
24	<i>Non si ruppero</i>	24	8	<i>Si rompe una sola</i>
16	<i>Si ruppero poco</i>	18	6	<i>Si rompe una, ma </i>
16	"			<i>chissimo.</i>
20	"	15	5	<i>Non si ruppero</i>
24	<i>Non si ruppero</i>	18	6	<i>Si ruppero al polo</i>
22	<i>Si ruppero poco</i>			
22	"			
23	<i>Si rupp. al solo polo più</i>			

I dati precedenti mostrano che nella prima serie la rottura delle lastrine avvenne con la scarica di 40 unità, comunicate a sole 22 o 23 bottiglie; e pel caso del potenziale costante la rottura cominciò a prodursi per la scarica di 18 unità comunicate a 6 bottiglie. Onde, come precedentemente, si conclude che l'energia della scarica dipende dalla quantità e dal potenziale della carica che la produce; e forse ripetendo e variando molto le esperienze, si potrebbero eseguire in proposito delle misure, almeno approssimate.

La frattura del vetro prodotto per l'azione della scarica avviene in un modo assai singolare e quasi direi specifico; imperocchè nei bordi della frattura il vetro presenta come un aspetto concoide, dovuto a due sistemi di curve diverse, uno per ciascun polo; e tali curve par che partino da ciascuno dei poli e quindi allontanandosi fra loro, nella frattura del vetro, ne raggiungono la faccia opposta ai poli



Ho poscia potuto spezzare e frantumare due lastre di specchio grosse insieme 16 a 17 millimetri, affacciate con le loro superficie di vetro, e con quelle argentate messe allo esterno, sulle quali, a mezzo dello spinterometro, facevo scaricare una grande batteria di 24 bottiglie attivata da 96 unità elettriche.

La scarica, perchè produca codesti fenomeni, deve scorrere con la sua scintilla sulle superficie argentate delle lastre; e l'azione può somigliarsi quasi ad un colpo d'ariete o di martello; e credo possa attribuirsi alla istantanea volatilizzazione dello strato d'argento investito dalla scarica. Onde è che questa energia della scarica cresce con la quantità e col potenziale della carica elettrica.

Finalmente, i bordi del vetro così fratturati presentano un aspetto concoide, con una serie di curve che sembrano partire da ciascuno dei poli e allargandosi raggiungono la faccia del vetro, opposta ai poli medesimi. Tali curve, per la loro direzione ricordano quelle degli spettri magnetici o delle linee di forza.



SULLA VARIAZIONE NELLA RESISTENZA ELETTRICA DI UN FILO METALLICO IN RELAZIONE AD ALCUNI DISTURBI PROVOCATI NE' SUOI SISTEMI MOLECOLARI; DI GIUSEPPE GEROSA.

Da un accurato studio circa le modificazioni che presentano i fili metallici nella resistenza al passaggio della corrente elettrica, quando vengono perturbati da azioni meccaniche, risultava al Mousson (1) che ogni operazione, la quale modifichi la costituzione interna dei fili, influisce in modo sensibile sulla detta re-

(1) Mousson. *Neue Denkschrift der allg. Schweiz Gesells. für die Naturwiss.*; vol. XIV, pag. 33, 1855.

NB. Non avendo potuto trovare nelle Biblioteche di Pavia, di Milano e di Roma le *Memorie della Società Elvetica*, almeno per l'anno 1855, mi son valso di un estratto abbastanza largo che il Mousson stesso fece della sua Memoria *Ueber die Veränderungen des galvanischen Leitungswiderstandes der Metalldrähte*, e che pubblicò nell' *Archives des sciences physiques et naturelles*, T. 31, pag. 111, 1856.

sia procurato di condurre l'arco sempre colla stessa legge di velocità e colla medesima pressione sulla corda; però i risultati medi, i quali direbbero che a parità di circostanze le vibrazioni coll'arco producono un aumento di resistenza maggiore, sebbene di poco, nella corda intera che nella metà di essa, si ripresentano sempre, ancorquando la corda era tesa da differenti cariche.

Quest'è detto appunto nella tavola seguente, dove si nota insieme che la regola non si continua più per un'ulteriore suddivisione della corda in quattro, in sette parti.

I numeri poi affetti dall'asterisco mostrano che, quando si fa vibrare la corda con una intensità molto più grande della normale, la deviazione è pur maggiore dell'ordinaria, in relazione, com'è naturale, alla grandezza del disturbo provocato; ma però, per una vibrazione che sia così regolare da produrre un suono netto, la deviazione ha un valore più piccolo del normale. Questi numeri non sono compresi nei valori medi.

sensibilità	DEVIAZIONI DELL' AGO GALVANOMETRICO				
	pesi	corda intera	$\frac{1}{2}$ corda	$\frac{1}{4}$ corda	$\frac{1}{7}$ corda
$\frac{45}{10000}$ U. S.	Klg. 0	0,09			
	»	13			
	»	08			
	»	11			
		<hr/>			
		m. 0,10			
	Klg. 1	0,11	0,06		
	»	12	12		
	»	15	10		
	»	15	14		
	»	13	12		
		<hr/>	<hr/>		
		m. 0,13	m. 0,11		

sensibilità	DEVIAZIONI DELL' AGO GALVANOMETRICO				
	pesi	corda intera	$\frac{1}{2}$ corda	$\frac{1}{4}$ corda	$\frac{1}{8}$ corda
$\frac{48}{16000}$ U.S.	Klg. 1	0,12	0,10	0,10	0,13
	»	15	09	12	13
	»	17	12	16 +	10
	»	22 †	10	09	14
	»	12	13	14	08*
	»	12		13	12
	»	21 †	m. 0,11		08*
	»	14		m. 0,12	13
	»	16			11
		m. 0,14			m. 0,12
	Klg. 2	0,20	0,11		
	»	11	13		
	»	20	33 †		
	»	28 †	17		
		m. 0,17	18		
			m. 0,15		
	»	0,15		0,15	
	»	14		18	
	»	21		12	
	»	14		19	
	»	19		m. 0,16	
		m. 0,17			

Da questa tavola risulta poi un altro fatto, che col crescere della tensione del filo crescono pure i valori delle deviazioni galvanometriche provocate dalle vibrazioni mediante l' arco ; e qui sotto si è voluto riferirne un esempio in particolare:

N.B. Al segno (†) corrispondono vibrazioni fatte con maggiore intensità della normale.
Al segno (+) corrispondono vibrazioni continuate più a lungo dell' ordinario.
Al segno (*) corrispondono vibrazioni che danno suoni chiari.

sensibilità	pesi	deviazioni		sensibilità	pesi	deviazioni
$\frac{20}{10000}$ U. S.	Klg. 0	0,08		$\frac{23}{10000}$ U. S.	Klg. 2	0,19
	»	10			»	15
	»	10			»	13
	»	09			»	15
		<hr/>			»	21
		m. 0,09			»	24
					»	11
	Klg. 1	0,13				<hr/>
	»	16				m. 0,17
	»	11				
	»	16			Klg. 2 $\frac{1}{2}$	0,23
		<hr/>			»	13
		m. 0,14			»	15
					»	19
	Klg. 2	0,22			»	19
	»	16			»	27
	»	16			»	17
	»	18				<hr/>
		<hr/>				m. 0,19
		m. 0,18				
	Klg. 3	rotto			Klg. 3	rotto

Le stesse prove furono ripetute sopra dei fili di acciaio, di ferro incrudito, di ferro ricotto e di rame, aventi un diametro di circa $\frac{1}{8}$ mm., e si ebbero risultati affatto simili; ad eccezione che pei fili di acciaio e di ferro incrudito, per incrementi successivi di 1 klg. da 0 a 3 klg., le differenze nelle deviazioni medie erano poco diverse dall'una all'altra carica, e non si presentava più costantemente una minor deviazione col vibrare solo la metà della corda anzichè l'intera. Però la regola si ripresentava passando da una carica di 2500 a $4.2500 = 10000$ grammi e portando la sensibilità del galvanometro da $\frac{20}{10000}$ a $\frac{23}{10000}$ U. S.

I fili di rame e di ferro ricotto furono tesi di due in due klg., e da 1350 a $4.1350 = 5400$ grammi, dacchè per 6 klg. si strappavano, e non si verificò alcuna eccezione.

È da notare però che, mentre pel filo di ferro incrudito di raggio eguale a mm. 01 si ottenevano col vibrare la corda intera, prima e dopo d'aver fatto vibrare la metà di essa, valori medi pressochè eguali, qui per i fili di acciaio e di ferro incrudito,

suoi estremi era fisso e l'altro era raccomandato all'un rebbio di un grande diapason, serrandolo fra il rebbio stesso ed il dischetto metallico che serve da specchio.

Il filo era isolato dal diapason mediante due laminette di ebanite ed era introdotto nel circuito sempre con bicchierini di mercurio, che erano interni ai punti pei quali il filo era tenuto.

Ora battendo leggermente con un martelletto di legno l'altro rebbio del diapason, non si notò pure nessuno spostamento nell'ago; solo vi aveva deviazione per una percossa forte; ma allora ancor quì, si manifestava nel filo una modificazione permanente nella resistenza. Per cui ancora una semplice vibrazione longitudinale non produce una variazione sensibile nella resistenza del filo.

Le prove sull'influenza della vibrazione longitudinale furono eseguite sui fili di ferro incrudito di raggio eguale a 0,1 mm. e 0,27 mm., di cui alcuni valori sono quì riferiti.

Filo di ferro incrudito ($r = 0,1$ mm.).

	deviazioni medio
battendo il rebbio leggermente.	0,00
» forte	0,07
» fortissimo	fuori della scala
vibrando coll'arco regolarmente	0,11
» fortissimo.	fuori della scala

Filo di ferro incrudito ($r = 0,27$ mm.).

	deviazioni medio
vibrando coll'arco regolarmente	0,20
battendo il rebbio leggermente.	0,00
vibrando colla lancetta leggermente.	0,00
» fortemente	0,13
vibrando di nuovo coll'arco	0,22

È riferito pure quì sotto qualche numero riguardo all'influenza del mezzo usato nel vibrare il filo. I dati si riferiscono al filo di ferro incrudito ($r = 0,1$ mm.) quand'era teso sul sonometro e fatto vibrare coll'arco da violino, coll'arco da contrabasso,

coll'arco da violino molto teso e rallentato. colla lancetta da mandolino e col martelletto di sughero.

	deviazioni medie
coll'arco da violino.	0,11
coll'arco da contrabasso	0,16
colla lancetta da mandolino	0,04
coll'arco da violino molto teso	0,16
» rallentato	0,10
col martelletto di sughero	0,00

Si può aggiungere che le stesse cose si osservarono quando il filo era tenuto per un estremo dalla branchia del corista; eccetto che quì si manifestavano più spiccate le perturbazioni prodotte nel filo.

Siccome però nelle esperienze del De Marchi i fili erano sospesi verticalmente, ho ripetuto le prove sui fili quando li avevo appesi all'albero, e dapprincipio in vero ottenevo risultanze poco diverse da quelle ch'ebbi al sonometro. Ma escludendo dal circuito il reostato di Siemens e raggiungendo per il galvanometro una sensibilità di $\frac{1}{10000}$ U. S., si notò per una vibrazione mediante il martelletto di sughero una sensibile deviazione. Questa era nel senso di un aumento nella resistenza del filo eccitato, se la vibrazione si faceva prima di caricare il piatto o quand'esso era stato scaricato del peso tensore o di una parte di esso; ma quando invece il filo era fatto vibrare dopo una carica qualunque, che fosse piccola o grande, che fosse la prima od una delle successive, si avvertiva una deviazione galvanometrica opposta, che accennava ad un decremento di resistenza nel filo. Questo però per la prima o per le prime vibrazioni, poichè nelle successive, anche continuate a lungo, si aveva costantemente un aumento di resistenza. Non fu raro il caso in cui vibrando il filo, tosto dopo che era stato assoggettato ad una trazione in più, si notava nel galvanometro un tentativo di deviare nel senso di un aumento di resistenza, cui subito però teneva dietro una effettiva e sensibile deviazione nel verso opposto.

Le prove furono stabilite sul filo di rame e di ferro incrudito ($r = 0,27$ mm.) ed in gran numero; ma per brevità solo ri-

ferisco un esempio per il filo di ferro, essendosi sempre ottenuto le stesse cose.

]



,

»

»

»

Di qui appar chiaro che se il filo, teso che fu teso da un peso maggiore, per opera del quale la sistemazione dei gruppi molecolari viene mutata così che riesce men facile la propagazione del moto elettrico, è fatto vibrare, i gruppi molecolari stessi tendono a vibrare per elasticità ed effettuano in parte il ritorno verso quelle condizioni di postura relativa, nelle quali si trovavano prima del disturbo provocato dal peso tensore. Per questo alla

resistenza, che si sarebbe continuamente presentato se avesse continuate le vibrazioni sulla corda intera.

Questo pel filo teso verticalmente. Ma, nelle stesse condizioni di sensibilità, usando il filo teso sul sonometro in luogo di quello del reocordo, per controbilanciare la resistenza del filo appeso all'albero, e percuotendo alternativamente or l'uno or l'altro dei fili, risultò che pel filo teso sul sonometro si ha pure una deviazione, che accenna ad aumento di resistenza, ma in generale così leggera, da esser compresa entro quegli stessi limiti fra i quali poteva oscillare l'ago del galvanometro, quando in esso si fosse verificata quella irrequietezza, che presentava talvolta lo strumento portato ad un alto grado di sensibilità. Pel filo sospeso liberamente poi si ripetevano i fatti dietro esposti.

Tenendo poi sull'identità dei fili si esaminò come essi si comportavano alle trazioni, stando sempre l'uno sul sonometro, l'altro sospeso all'albero, e si ebbero risultati affatto concordi.

Laonde restano confermate le esperienze di Mousson circa l'influenza della vibrazione sulla resistenza elettrica dei fili; da che egli aveva disposto l'esperienza precisamente com'è quì sul sonometro di Marloy; ma nello stesso tempo possono non essere erronei i risultati del De Marchi, se il galvanometro nelle sue esperienze, si trovava nelle stesse condizioni di sensibilità (1).

Quanto poi alla singolarità avvertita dal De Marchi pel filo di rame, di una diminuzione di resistenza col crescere del peso tensore, almeno per piccole cariche, credo che sia da attribuire all'aver egli introdotto nel circuito il filo da esaminare mediante serrafili; poichè, sebbene le aperture di essi fossero « otturate da stagnola compressa per rendere più completo il contatto » tuttavia il Mousson ha dimostrato che le congiunzioni dei reofori mediante dei pezzi metallici fissi può essere abbastanza buona,

(1) È inutile osservare che, se il De Marchi, come dubita il Prof. Emo, avesse fatto vibrare i fili colle dita o coll'arco da violino, non avrebbe ottenuto che deviazioni di uno stesso verso, almeno che non avesse vibrato a capriccio or l'uno or l'altro dei due fili, che egli aveva sospesi verticalmente. L'inavvertenza d'altronde, del vibrare la corda colle dita, pare inammissibile ancor più, da che il riscaldamento prodotto dal prendere il filo fra il pollice e l'indice, che nel caso mio corrispondeva con grossolana approssimazione ad innalzare la temperatura di un centimetro di filo da 25° (temperatura dell'ambiente) a 32° (temperatura delle dita), fa deviare di ben 12 divisioni l'ago, quando la sensibilità del galvanometro è di $\frac{11}{10000}$ U. S.

stabilendo con una forte pressione un contatto di superficie, ma che però la minima variazione nella pressione o nella posizione delle parti in contatto può far nascere differenze apprezzabilissime nella resistenza, e che in tal categoria di congiunzioni si devono comprendere quelle fatte mediante viti o pinze.

Ed ho provato in alcune esperienze preliminari ad introdurre nel circuito il filo da studiare nello stesso modo che fece il De Marchi. Orbene, per un filo di ferro ricotto del raggio di 0,11 mm. fra alcuni risultati buoni si ebbero ancora ad esempio di questi valori singolari, quand'esso veniva fatto vibrare coll'arco:

pesi	DEVIAZIONI DELL' AGO		
	corda intera	$\frac{1}{2}$ corda	$\frac{1}{2}$ corda
Klg. $\frac{1}{2}$	+0,18	0,03	
	+0,10	0,30	
	-0,27	0,07	
	+0,35	0,07	
	+0,10	0,07	
	+0,08		
» 1	+0,48	0,06	0,07
	-0,25	0,09	0,10
	+0,45	0,04	0,07
	-2,25		0,05
	+2,20		
	-0,04		
	+0,54		
	+0,15		
	+0,20		
» $1\frac{1}{2}$	+0,10	0,07	0,07
	-0,15	0,10	0,10
	-0,50	0,05	0,15
	+0,25	0,07	0,08
	-0,25		0,06
	+0,08		
	+0,49		

Così dicasi per un filo di ottone ($r = 0,1$ mm.); mentre non si avvertì alcuna singolarità per un filo di ferro incrudito ($r = 0,1$ mm.), forse perchè meno modificabile del ferro ricotto e dell'ottone. Ma comeccchia è certo che, se non sempre si hanno, si possono tuttavia avere nei punti pressi dei punti cri-

dove si vede che, fatte le dovute proporzioni, la deviazione, corrispondente alla variazione media nelle dimensioni dei 122 cm. di filo per la trazione di 300 grammi, è di 0,025.

Il filo fu poscia sottoposto a differenti trazioni mentre era teso sul sonometro ed attraversava un tubo di vetro, avente la lunghezza di circa 90 cm. ed il diametro interno di circa 6 mm. sul quale era avvolto a spire serrate un filo di rame isolato, che veniva percorso da una corrente fornita da 2 grandi elementi Bunsen. La modificazione prodotta dall'induzione della spirale sul filo non alterò sensibilmente la legge di variazione nella resistenza per la trazione con pesi diversi, come si osserva nell'esempio qui sotto che vien riferito solamente pei fili di ferro incrudito.

Filo di ferro incrudito ($r = 0,1$ mm.)

NON INDOTTO DALLA CORR.		INDOTTO DALLA CORRENTE	
pesi	deviazioni	pesi	deviazioni
Klg. $\frac{1}{2}$	0,32	Klg. $\frac{1}{2}$	0,35
1	0,36	1	0,45
1 $\frac{1}{2}$	0,42	1 $\frac{1}{2}$	0,35
	<hr/>		<hr/>
	m. 0,37		m. 0,38

Filo di ferro incrudito ($r = 0,27$ mm.)

pesi	NON INDOTTO — deviazioni	INDOTTO — deviazioni	NON INDOTTO — deviazioni
Klg. 2	0,22	0,23	0,22
4	0,26	0,22	0,21
6	0,23	0,27	0,24
8	0,21	0,25	0,25
10	0,25	—	0,25
	<hr/>	<hr/>	<hr/>
	m. 0,23	m. 0,24	m. 0,23

Nè qualche cosa di diverso avveniva mantenendo i fili sotto l'induzione della spirale percorsa da una corrente data da 5 grandi elementi Bunsen, in quanto al variare della loro resistenza

*Filo di acciaio ($r = 0,25$ mm.).**Filo di rame ($r = 0,24$ mm.).*

0	0,48	0,41	0,33	id.
2	0,35	id.	0,29	id.
4	0,35	id.	0,30	id.
	0,33	id.	0,28	id.
6	0,34	id.	0,30	id.
	0,36	id.	0,29	id.
	0,34	id.	0,28	id.
0	0,35	id.	0,30	id.
	0,35	id.	0,30	id.

Filo di ferro incrudito ($r = 0,27$ mm.).

0	0,95	id.	0,93	0,62
5	1,20	0,96	0,96	0,63
0	1,10	0,98	0,96	0,64
	1,30	1,00	0,94	0,63
	1,26	0,99	—	—
0	1,00	0,93	0,94	0,64
	1,20	0,95	0,76	0,48
	1,30	0,99	0,80	0,53
5	1,29	1,02	0,82	0,56
0	1,26	0,99	—	0,55
	1,49	1,01	0,82	0,53
	1,32	1,05	0,82	0,53
	1,41	1,00	0,86	—
	1,30	—	—	—
0	1,02	1,00	0,82	0,56
	1,32	1,01	0,83	0,54
	1,31	—	—	—

Il confronto fra i risultati del 1881 e quelli del 1882, ottenuti in condizioni atmosferiche diverse, dimostrò che i rapporti fra le intensità calorifiche delle diverse regioni dello spettro, non dipendono dalla maggiore o minore quantità di vapore d'acqua nell'aria. L' A. presenta una seconda tavola per le lunghezze di onda, di raggi posti a distanze note dalla D, avendo posto 60 per la lunghezza d'onda di questa stria. La prima colonna contiene i nomi delle strie, la seconda le lunghezze d'onda, e la terza le distanze a D in minuti.

I ^a	II ^a	III ^a
»	189,6	96,40
»	145,8	80,00
»	115,2	63,20
»	97,8	46,40
A	77,34	59,50
B	69,60	26,00
C	66,72	20,00
D	60,00	0,00
b	52,66	—32,00
F	49,34	—50,00
G	43,98	—95,00

La nota termina con alcune osservazioni sul modo di confrontare fra loro le quantità di calore, che nello spettro son comprese fra raggi le di cui lunghezze d'onda differiscono di una quantità costante.

M. QUET. *Sopra l' induzione dovuta alla variazione di intensità della corrente in un circuito piano ed in un solenoide qualunque; e due leggi analoghe a quelle di Biot e Savart.* — In questa nota l' A. seguita ad annunciare i risultati delle sue ricerche teoretiche sulla induzione, ma, come le precedenti, questa nota non si presta ad un sunto breve e chiaro, e ci lascia nel desiderio di poter leggere il lavoro pubblicato per intero.

C. E. DE KLERCKER. *Ricerche sulla dispersione della luce.* — L' A. considera il fenomeno sotto un punto di vista esclusivamente fisico, tralasciando ciò che concerne il meccanismo della propagazione del movimento nell'etere; e la sua teoria parte

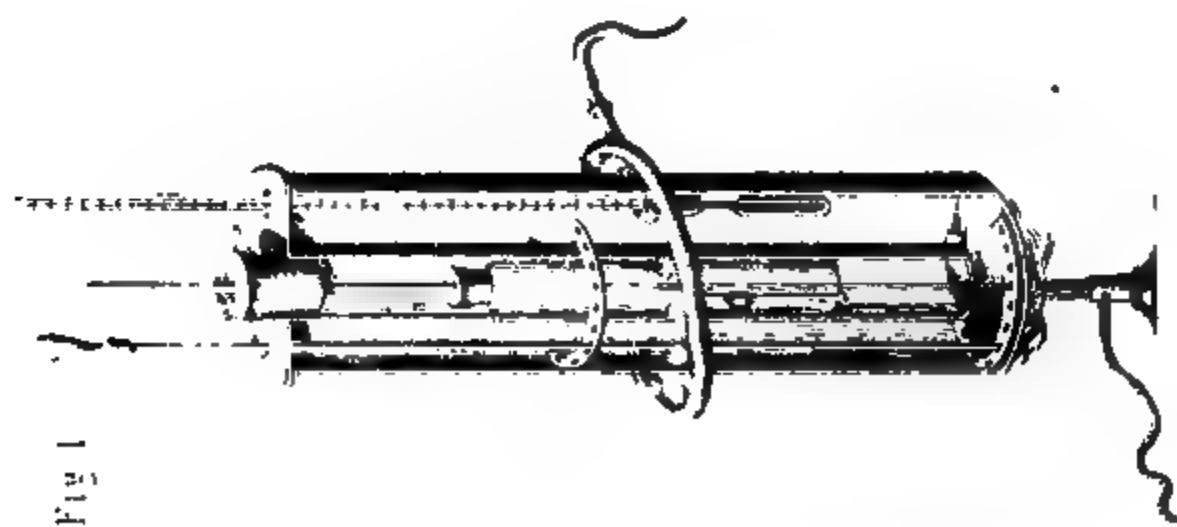
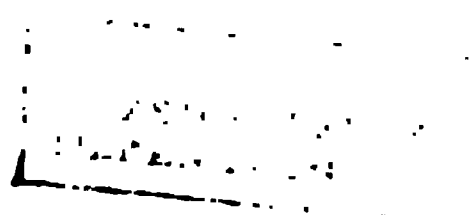


Fig. 3



IL NUOVO CIMENTO
ANNO XXX.



IL NUOVO CIMENTO

GIORNALE FONDATO PER LA FISICA E LA CHIMICA

DA C. MATTEUCCI E R. PIRIA

CONTINUATO

PER LA FISICA ESPERIMENTALE E MATEMATICA

da E. BETTI e R. FELICI

Terza serie Tome XV.

P I S A

TIP. PIERACCINI DIR. DA P. SALVIONI

1884

SUL CALORICO SPECIFICO DELLA MELLITE;
NOTA DI A. BARTOLI ED E. STRACCIATI.

Essendoci proposti di determinare le proprietà termiche dei sali e delle soluzioni dell'acido mellitico scoperto dal Klaproth nella mellite e da uno di noi (1) ottenuto in quantità abbondante con la elettrolisi dell'acqua e delle soluzioni alcaline con elettrodi di carbone di storta o di legno, e per l'ossidazione del Mellogeno $C_{12}H_2O_4$, abbiamo incominciato questo studio partendo dalla mellite minerale, che si trova in natura ben cristallizzata nei depositi carbonosi di Arten (Turingia), di Luschitz (Boemia) e di Walchow (in Noravia) ec.

La mellite o pietra del miele, fatta conoscere dal Werner col nome di Honigstein è mellato alluminico, rispondente alla formola (2)



(1) Bartoli e Papasogli. *Sintesi di vari composti organici per via elettrica* — *Nuovo Cimento*, anni 1880-81-82-83, e *Gazzetta Chimica*, anni 1881-82-83. Si veda anche la nota *Sul modo di formazione della mellite* — *Atti della Società Toscana di Scienze Naturali*, ad. del 2 Novembre 1882.

(2) Compara Klaproth, *Dictionnaire de chimie*, t. III, pag. 80, Parigi 1811.

Gmelin, *Handbuch der chemie, (Organische chemie)*, Bd. V, s. 188 (Heidelberg 1852). Quivi sono riportate le analisi della mellite fatte da Wöhler e da Klaproth.

Watt's, *Dictionary of chemistry*, vol. III, pag. 871. Quivi è confermato che, la mellite perde tutta l'acqua di cristallizzazione ad una temperatura vicina al punto di ebullizione dell'acido solforico.

Compara anche Wurtz, *Dictionnaire de chimie*, t. II, pag. 355, e Rammelsberg, *Handbuch der Krystallographisch-Physikalische chemie*, Bd. II, s. 65-66.

I. Grammi 0,877 mellite della prima provenienza rimasero grammi 0,877 dopo 48 ore a 85°, a 100° si ridussero a grammi 0,614 senza perdere ulteriormente di peso: a temperature superiori il peso diminuì continuamente senza arrestarsi tanto che a 320° si ridusse fino a 0,223 con perdita di carbone oltre quelle di acqua.

II. Grammi 0,751 di mellite del secondo campione non persero affatto di peso dopo 72 ore a 85°; a 100° si ridussero a grammi 0,527 senza perdere di più: a temperature superiori diminuirono continuamente: riducendosi a 0,467 dopo 11 ore a 200°.

III. Grammi 0,964 di mellite del terzo campione si ridussero a grammi 0,673 dopo 48 ore a 100° senza perdere più di peso: a più alta temperatura perdevano continuamente.

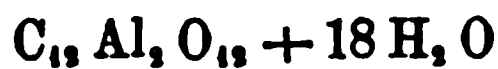
Ne segue che la perdita d'acqua a 100° è dunque un po' variabile nei diversi campioni:

nel 1° è 29,99 per 100°

nel 2° è 29,83 per 100°

nel 3° è 30,19 per 100°

la quale corrisponderebbe alla perdita di 12 molecole di acqua del composto



per cui il mellato alluminico seccato a 100° avrebbe per formula (1)



e che a temperature più alte vicino a 300° non si riesce a far perdere tutta l'acqua senza alterare il composto.

Fu determinata l'allumina per calcinazione della mellite, entro crogiolo di platino con le solite precauzioni indicate nel Fresenius.

I. Grammi 0,877 di mellite del primo campione calcinate si ridussero a 0,132 onde parte minerale per 100 è 15,05.

II. Grammi 0,751 di mellite del 2° campione calcinate si ridussero a grammi 0,116 di parte fissa onde parte minerale per 100 è 15,44.

(1) Infatti 100 parti di $C_{12}Al_2O_{12} + 18H_2O$ riducendosi a $C_{12}Al_2O_{12} + 6H_2O$ perdono 30,21 % di acqua.

uno dei calorimetri Bunsen ⁽¹⁾ che avevano servito ad uno di noi per la determinazione dell'equivalente meccanico del calore.

Nella tavola seguente il calorico specifico S si calcola con la formula

$$S = \frac{T}{W_w G t}$$

dove S indica il calorico specifico medio della mellite fra t gradi e zero gradi. W_w lo spostamento dell'indice di mercurio corrispondente ad una piccola caloria supposto il tubo capillare diviso in parti di uguali capacità. G il peso in grammi della mellite. t la temperatura iniziale della mellite. T lo spostamento dell'indice di mercurio dovuto al calore ceduto dalla mellite; il quale si deduce dallo spostamento osservato, applicandovi la correzione dovuta allo spostamento prodotto da cause esterne durante l'esperienza.

Questo termine T si calcola con la formula

$$T = (Q_o - Q_i) + (M_i - M_o) \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_o}{m_o} + \frac{\tau_i}{m_i} \right)$$

dove Q_o e Q_i indicano la posizione occupata dallo estremo della colonna di mercurio all'istante in cui si getta la mellite nella campanella del calorimetro ed alla fine dell'esperienza; M_o ed M_i i tempi corrispondenti e queste due osservazioni contati in minuti: τ_o lo spostamento dell'indice durante m_o minuti precedenti al tempo M_o ; τ_i lo spostamento dell'indice durante m_i minuti susseguenti al tempo M_i .

Naturalmente il tubo capillare del calorimetro non era esattamente cilindrico, ma si erano costruite delle esatte tavole di calibrazione, servendosi del metodo di Kopp.

Il valore di W_w fu determinato con quattro esperienze seguendo il metodo indicato dal Bunsen ⁽²⁾. I valori trovati furono

$$1.^{\circ} \quad W_w = 22,850$$

$$2.^{\circ} \quad W_w = 22,842$$

$$3.^{\circ} \quad W_w = 22,859$$

$$4.^{\circ} \quad W_w = 22,856$$

(1) Bartoli, *Atti della R. Acc. dei Lincei*, vol. VIII, 1880 e *Nuovo Cimento*, 3. serie, t. VIII pag. 5.

(2) Bunsen, *Pogg. Ann.* 1870, Bd. CXLI, s. 1.; e *Bibliothèque univ. de Genève*, 1871, t. 40, pag. 25.

di cui la media è

22,8518.

Nella tavola seguente sono iscritti i dati che hanno servito a calcolare S; riporto solo quelle tre esperienze nelle quali il valore della correzione da apportare a T è nulla o assai piccola.

TAVOLA I.

			Mellite del primo campione.	Mellite del primo campione	Mellite del primo campione
Peso della mellite.	G		0,6187	0,0971	0,2386
Temperatura iniziale della mellite. .	t		79°,36	79,48	79,48
Durata dell'esperienza	M ₁ —M ₀		70'	60'	50'
Spostamento del mer- curio dovuto a cau- se esterne.	Avanti l'esperienza.	$\frac{\tau_0}{m_0}$	± 0	± 0	+ 0,042
	Dopo l'esperienza.	$\frac{\tau_1}{m_1}$	± 0	± 0	+ 0,081
Ampiezza dello spostam. del mercurio.	Q ₀ —Q ₁		370,4	58,2	141,1

Costante W_w = 22,8518.

Dietro questi dati i calorici specifici medii fra 79°,4 e 0° della mellite adoperata in queste esperienze sono

S = 0,33012
S = 0,33001
S = 0,33001

dei quali la media è, 0,33005.

Calorimetro ad acqua.

Abbiamo anche determinato il calorico specifico dei tre campioni di mellite provenienti da tre differenti località (fornitaci dal sig. Schuchardt di Goerlitz) col metodo del calorimetro ad acqua.

Il calorico specifico è stato principalmente determinato col metodo di Regnault. La mellite veniva scaldata in una stufa simile a quella di Regnault nella quale si faceva bollire dell'alcool

etilico, la temperatura della mellite si misurava con un termometro normale di Baudin diviso in quinti di grado e immerso nello stesso tubo in cui era la mellite (').

Il calorimetro adoprato era di sottile lamina di ottone specolare, poggiava su un treppiedi di legno nell'interno di un vaso di rame argentato internamente il quale era circondato da una scatola alla Berthelot contenente parecchi litri di acqua. Un disco di cartone ricoperto di latta impediva il rinnovarsi dell'aria fra gli involucri che circondavano il calorimetro.

Con questa disposizione si attenuavano molto gli scambi di calore fra il calorimetro e l'ambiente.

Il calorimetro era affatto difeso dal raggiamento della stufa oltre che da questi involucri da un triplo diafragma formato da tre grandi cartoni spessi ricoperti di latta e separati uno dall'altro da uno strato di aria di un mezzo centimetro.

I termometri adoperati furono principalmente 2 di Baudin divisi in cinquantesimi di grado segnati coi numeri 9744 e 9159 rispettivamente, previamente confrontati con un termometro normale a decimi di grado costruito dal fu Geissler e già stato paragonato col termometro ad aria.

La lettura era fatta per mezzo di una lente e le divisioni essendo abbastanza ampie (circa un millimetro) potevasi facilmente apprezzare i quinti di divisione ossia $\frac{1}{250}$ di grado.

La temperatura iniziale dell'acqua del calorimetro era la stessa di quella dell'ambiente e dell'acqua del vaso esterno: inoltre si aveva cura di accertarci immediatamente avanti la esperienza che la temperatura del calorimetro rimaneva assolutamente costante. Allora notata la temperatura della stufa (la quale doveva essere rimasta invariata almeno da un quarto d'ora) e la temperatura iniziale del calorimetro, con un solo movimento si

(1) Ben s'intende che appena determinata col normale Baudin la temperatura iniziale della Mellite si rideterminava subito la posizione dello zero dello stesso termometro, come è indicato nelle memorie del sig. Nareck ec. (*Travaux et Memoires du Bureau international des poids et mesures*, Paris, Gauthier-Villars, 1881, pag. (D. 11). Compara anche J. M. Crafts, *Mesure thermométriques* (*Bullettin de la Société chimique de Paris* 1883 e *Comptes Rendus*, t. XCI, XCIV, XCV) nonchè J. Pernet Carl's *Reperitorium*, 1875, Bd. XI, s. 257.

T temperatura iniziale del calorimetro ;

T' » finale » (1);

Θ » della stufa (1);

π peso della mellite ridotto al vuoto ;

t raffreddamento del calorimetro dovuto al raggiamento ;

c calorico specifico medio fra Θ e T' ;

N Numero d'ordine del registro generale delle nostre esperienze calorimetriche.

Quindi abbiamo :

$$c = \frac{(P + p)(T' - T + t)}{\pi(\Theta - T' - t)} .$$

TABELLA II.

Mellite (1.° Campione di Boemia). Densità 1,60.

Medio 0,32816

TAVOLA III.

2.° Campione (Turingen). Densità 1,57.

N	Thermom. Baudin N.°	P	p	T	T'	Θ	π	t	c
756	9159	100,9918	3,6727	24,600	26,439	79,29	11,0779	0,007	0,33005
757	9159	102,9987	3,6727	24,724	26,527	79,29	11,0679	0,007	0,33066
758	9159	102,6183	3,6727	25,656	27,439	79,39	11,0379	0,008	0,33203
759	9159	103,3499	3,6727	25,210	26,989	79,39	11,0079	0,009	0,33179
760	9159	101,7185	3,6727	25,590	27,387	79,29	11,0079	0,008	0,33301
763	9159	97,3481	3,6727	25,234	27,103	79,39	10,9247	0,009	0,33218
764	9159	102,8476	3,6727	26,956	28,667	79,29	10,8547	0,008	0,33114

medio 0,33155

(1) Le temperature T' e Θ sono corrette per la porzione della colonna del termometro che non era immersa nel calorimetro o entro la stufa.

TAVOLA IV.

3.^o Campione (Urali) Densità 1,59.

N	Termom. Baudin N.º	P	<i>p</i>	T,	T'	Θ	π	<i>t</i>	<i>c</i>
765	9159	99,6307	3,6727	25,360	26,923	79,39	9,2883	0,009	0,33328
767	9159	98,5394	3,6727	26,920	28,451	79,09	9,2783	0,008	0,33442
768	9159	98,3084	3,6727	27,160	28,687	79,09	9,2483	0,009	0,33610
769	9159	103,2907	3,6727	28,016	29,499	79,09	9,2483	0,007	0,33576

medio 0,33489

Il calorico specifico di un altro campione di mellite fu determinato dall' egregio giovane sig. Adolfo Mochi allievo di questo Istituto, il quale frequenta da tre anni questo Gabinetto di fisica, adoperando per termometro calorimetrico un buon termometro di Deleuil diviso in ventesimi di grado.

I risultati di queste determinazioni sono riportati nella tavola seguente :

TAVOLA V.

N	P	<i>p</i>	T	T'	Θ	π	<i>t</i>	<i>c</i>
761	101,1990	2,6242	27,825	29,533	79,49	10,98	0,017	0,32661
762	101,9495	2,6242	27,225	28,983	79,49	10,94	0,007	0,33408

medio 0,33034

Metodo di Kopp. — Abbiamo fatto alcune determinazioni del calorico specifico della mellite col metodo di Kopp.

L'apparecchio riscaldante era costituito da un vaso cilindrico di ottone ripieno per $\frac{2}{3}$ di petrolio che bolle sopra 150°, nell'interno è posto un vaso di vetro contenente mercurio nel quale s'immerge il tubetto di vetro contenente la mellite. — Il liquido che bagnava la mellite era essenza di trementina rettificata, la temperatura del bagno di mercurio era misurata con un termometro normale di Baudin diviso in quinti di grado.

Il calorimetro adoperato in queste esperienze era affatto simile a quello adoperato nelle esperienze precedenti: in questo

caso si rendeva inutile l'uso dell'agitatore servendo dapprima il termometro stesso e poi il tubetto di vetro.

Le esperienze erano condotte nel modo seguente: l'acqua del calorimetro inizialmente aveva la stessa temperatura dell'ambiente e dell'acqua contenuta nel vaso esterno come nelle esperienze precedenti, ed era posta nel calorimetro e pesata pochi minuti avanti la esperienza.

Per determinare colla maggior certezza la temperatura iniziale della mellite, si riscaldava il bagno lentissimamente e prima di fare l'esperienza ci si assicurava che almeno da un quarto d'ora la temperatura del bagno a mercurio non avesse variato sensibilmente: allora letta la temperatura dell'apparecchio riscaldante e del calorimetro si estraeva rapidamente il tubetto del bagno e si portava nel calorimetro disposto lì presso.

Si osservava la temperatura del calorimetro di $30''$ in $30''$ finchè continuava a crescere cioè generalmente per 4 primi e dopo si continuava ad osservare per altri 8 o 10 primi per fare la correzione pel raffreddamento.

Quando la temperatura del calorimetro aveva raggiunto il massimo e restava un poco stazionario non si poteva ammettere che nell'interno del tubetto la mellite e il liquido che la bagna avessero la stessa temperatura. Si cercò di determinare la differenza fra le due temperature e si trovò che la temperatura nell'interno del tubo era $0^{\circ},7$ più elevata che nel calorimetro.

Questa differenza fu determinata ponendo nell'interno del tubetto un termometro affatto identico a quello del calorimetro e precedentemente confrontati. Erano due termometri di Baudin divisi in quinti i quali andavano affatto d'accordo all'infuori di una differenza costante di $0^{\circ},4000$.

In una esperienza preliminare abbiamo determinata la quantità di calore ceduta dal tubetto di vetro vuoto raffreddandosi di 1° fra 15° e 70° ed è stata trovata calorie 0,9709 come pure abbiamo determinato il calorico specifico medio della nostra essenza di trementina nello stesso intervallo di temperatura e lo abbiamo trovato eguale a 0,4550 ⁽¹⁾.

(1) L'essenza di trementina adoperata era da noi stata distillata frazionatamente su carbonato sodico anidro e cloruro calcico. Era levogira. Aveva un punto di ebullizione costante presso a poco uguale a quello assegnato nei trattati alla essenza di trementina francese.

Riportiamo nella tavola seguente i risultati delle determinazioni fatte.

Rappresentiamo con

P il peso dell'acqua del calorimetro ridotto nel vuoto.

p equivalente in acqua del calorimetro e della parte immersa del termometro.

T temperatura iniziale del calorimetro.

T' » finale »

Θ » dell'apparecchio riscaldante

π peso della mellite ridotto al vuoto.

π' peso della trementina.

t raffreddamento del calorimetro dovuto al raggiamento.

c calorico specifico medio fra Θ e T'

N numero d'ordine del registro generale delle esperienze calorimetriche.

Avremo:

$$c = \frac{(P+p)(T'-T+t) - 0,9707(\Theta - T' - t) - 0,4550\pi[\Theta - (T' + 0,7) - t]}{\pi[\Theta - (T' + 0,7) - t]}$$

TAVOLA VI.

N	P	p	T	T'	Θ	π	π'	t	c
785	179,5834	3,2260	15,750	17,830	66,84	9,37	8,30	0,017	0,3368
786	177,9816	3,2260	15,575	17,780	70,18	9,37	8,11	0,022	0,3345
787	179,5233	3,2260	15,625	17,730	68,66	9,37	7,91	0,022	0,3371
788	178,6024	3,2260	15,900	17,955	67,55	9,37	7,87	0,017	0,3353

Media 0,33592

Riassumiamo nella tavola seguente i valori trovati coi vari metodi pel calorico specifico dei vari campioni di mellite:

Mellite del primo campione 0,33005 fra 0° e +79,4 col calor. Bunsen

Mellite » . . . 0,32816 fra 27 e +79° calorim. ad acqua

Mellite proven. da Turingen 0,33155 fra 25° e +79 id.

Mellite degli Urali . . . 0,33489 fra 27° e +79 id.

Altro campione di mellite . 0,33592 fra 15°5 e +68 col met. di Kopp.

Nondimeno non credo inutile descrivere qui un nuovo apparecchio per determinare in lezione con una certa esattezza il valore dell'equivalente; sia perchè l'apparecchio è poco costoso e facile a costruirsi da chiunque sappia discretamente soffiare il vetro, sia perchè il calcolo che conduce alla determinazione dell'equivalente offre agli alunni un utile esempio del come applicare varie leggi di fisica, sia anche perchè col mio apparecchio il valore dell'equivalente è dedotto da spostamenti di un indice, assai ampi e che si possono rendere visibili ad una certa distanza come ho provato varie volte in lezione.

L'apparecchio consiste essenzialmente in un termometro a benzina a bulbo lunghissimo e verticale, entro il quale si fa discendere a poco per volta del mercurio; l'apparecchio dopo la caduta del mercurio è pronto per una nuova esperienza, che si fa col girare di 180° il bulbo, intorno ad un asse orizzontale che passa pel suo mezzo.

A B (*Tav. I. fig. 1.*) rappresenta il bulbo che è formato da un tubo di vetro lungo 60 centimetri o più; di 15 a 20 millimetri di diametro; agli estremi porta saldati due palloncini *a, b* dello stesso diametro del tubo e di capacità esattamente uguali riuniti al tubo, per mezzo di due strozzature, le quali fanno sì che il mercurio che riempie uno dei due palloncini impieghi un certo tempo (da 7 a 20 secondi) per uscirne, quando il tubo è verticale. Un tubo capillare CD esattamente calibrato permette di valutare gli spostamenti della colonna liquida. Un filo di platino i cui capi terminano coi serrafili EF è saldato al bulbo nei punti *e, f* e penetra nell'interno ripiegandosi a doppia squadra per prendere la direzione dell'asse: questo filo di platino permette di graduare calorimetricamente il termometro per mezzo

lavano fra 508 e 392. Ma però tali valori richiedono per esser calcolati una formula assai complicata e non comoda a spiegarsi in lezione: la formula è

$$E = \frac{2 \pi l P}{c (S - S_0)} \left(1 - \frac{R t}{2} \right) t \cos \phi$$

dove π è il numero dei giri del cono ad ogni minuto secondo: l la lunghezza della leva che porta i pesi; P il peso applicato alla leva; c l'equivalente in acqua del calorimetro; S_0 la temperatura iniziale del calorimetro; S la temperatura finale; t la durata della rotazione in minuti secondi ed R la velocità del raffreddamento dell'apparecchio nelle condizioni dell'esperienza.

tà di calore, ossia fra quelli nei quali è maggiore il rapporto $\frac{K}{c d}$ dove K è il coefficiente di dilatazione alla temperatura dell'esperienza, c il calorico specifico e d il peso specifico del liquido. Ho però dovuto rinunciare all'etere ed al solfuro di carbonio perchè in questi il mercurio ben presto si altera notevolmente ⁽¹⁾ ed ho ricorso invece a benzolo (C_6H_6) ed agli idrocarburi volatili del petrolio (chiamati in commercio benzina del petrolio) perchè non si alterano all'aria nè alterano il mercurio per quanto questo vi soggiorni, mentre sono assai dilatabili ec. ⁽²⁾.

Devo notar qui che nelle esperienze procuro sempre che il termine della colonna liquida sia assai basso, in modo che anche dopo avvenuta la dilatazione essa non pervenga che a un decimetro o più di distanza dalla oliva o imbuto aperto D; in tali condizioni l'evaporazione del liquido termometrico anche durante un'ora è perfettamente trascurabile ⁽³⁾.

(1) Il mercurio anche purissimo agitato nell'etere anche di recente distillato, si appanna e dà luogo alla formazione di una polvere scura [probabilmente ossido di mercurio]. Anche col solfuro di carbonio, il mercurio agitatovi insieme si cuopre di una pellicola scura [forse solfuro] che toglie al mercurio la lucentezza e la scorrevolezza.

(2) Un facile calcolo mi provò che era possibile rendere ben visibili gli spostamenti dell'indice, scegliendo convenientemente il diametro del tubo capillare.

Infatti indicato con E l'equivalente meccanico del calore, la quantità di calore corrispondente ad una discesa del mercurio è L/E ; e questa produrrà nel liquido una di-

latazione $x = \frac{L}{E} \frac{K'}{c \delta}$, dove K' è il coefficiente di dilatazione apparente della benzina

nel vetro, alla temperatura a cui si esperimenta: ossia

$$x = \frac{P s}{E} \left(1 - \frac{\delta}{\Delta}\right) \frac{K'}{c \delta}$$

Supposto $P = 0,001$; $s = 0,5$ si ha per la benzina approssimativamente [Rammelsberg, *Physical chemie*, II, s. 203, Leipzig 1882]:

$$\delta = 0,9 \quad K = 0,0012 \quad c = 0,4$$

* preso per semplificare i calcoli

$$E = 430 \quad \Delta = 13,6$$

viene $x = 0,000000362$ ossia millimetri cubi 0,362. Perciò se il tubo capillare CD ha il diametro di mezzo millimetro, l'ascensione della colonna per una sola discesa del mercurio è millimetri $0,362 \times 16/\pi$ ossia quasi due millimetri e perciò ben visibile. Nella formula precedente si è per semplicità trascurata la dilatazione di quel poco mercurio che è nell'apparecchio perchè assai piccola di fronte a quella del liquido.

(3) Stefan, *Sitzungsberichte der math. Naturwissenschaften ec. der k. Ak. der Wiss. in Wien*, 1873, s. 385. — Egli trova che la velocità di evaporazione di un li-

nei *b) d) e)* da me trattati, può dirsi solo che la luce emergente *può essere considerata* come costituita da raggi di diversi numeri di vibrazioni coesistenti. Il Verdet ammette che uno spettroscopio potente li separerebbe, ma parmi che ciò non possa accadere. Così per esempio nel caso del Verdet, mentre la luce emergente dal nicol vibrante può essere considerata come costituita da raggi circolari opposti, di numeri di vibrazioni diversi, essa può del pari essere considerata come luce dotata di polarizzazione rettilinea, ma il cui piano di polarizzazione si sposta continuamente. E siccome la dispersione in un prisma non dipende dall'azimut della vibrazione, lo spettroscopio deve agire sopra un tal raggio come sopra uno di luce naturale, e dare sempre lo spettro corrispondente al moto vibratorio risultante che ha luogo nell'etere che occupa la fenditura dello strumento. Se con un analizzatore circolare o altrimenti si intercettasse uno dei due raggi circolari, certamente allora si avrebbe la riga corrispondente al numero di vibrazioni dell'altro, anzichè quella corrispondente al moto vibratorio risultante.

Ma, ripeto, nei casi *a) c) f)* nei quali la luce che emerge dal sistema girante è semplice, parmi che non possa esservi dubbio, che essa debba rifrangersi nel prisma prendendo la direzione corrispondente al numero di vibrazioni quale resta modificata dalla rotazione del nicol e della mica; e se un giorno si potranno ottenere o rotazioni abbastanza rapide o spettroscopi abbastanza potenti, si constaterà uno spostamento delle righe dovuto alla rotazione di un polarizzatore, nello stesso modo che si ha uno spostamento simile dovuto, in virtù del principio di Döppler, al moto relativo della sorgente luminosa e dell'osservatore.

II. È possibile in varie maniere modificare con polarizzatori giranti, il numero di vibrazioni dei raggi che interferiscono nell'esperienza di Fresnel. Ecco in breve alcune delle disposizioni da me realizzate; per le altre e per i dettagli di tutte, veggasi la memoria completa.

a) I raggi solari polarizzati in modo che le vibrazioni si facciano verticalmente, cadono sulla solita lente cilindrica che li concentra in una lineetta verticale, poi sugli specchi di Fresnel

questa ed il diaframma, sono distanze coniugate rispetto alla lente. Queste frangie si formano nella luce parallela non limitata, e si spiegano in modo simile alle frangie che dà in condizioni analoghe il compensatore di Babinet. Sono le stesse frangie che vennero utilizzate dal Sénarmont pel suo polariscopio, ma che per quanto mi consta, non erano ancora state ottenute in proiezione. Se il polarizzatore gira, o se si interpone una mica di mezz'onda girante, si osserva il solito fenomeno delle frangie in moto ossia battimenti.

È naturale che, stante la maniera nella quale sono ottenuti i raggi interferenti di numero diverso di vibrazioni, ognuna di queste, e di altre esperienze analoghe che qui non sono narrate, si possa descrivere e spiegare considerando quale deve essere la posizione delle frangie per ogni successiva posizione del corpo girante. Ma un tal modo di interpretare i fenomeni, mentre è spesso più lungo e difficile, è anche meno consentaneo al vero, giacchè difatti, per quanto si è detto è da ritenersi che quando i raggi a lunghezza di onda alterata, sono stati separati hanno un'esistenza reale, ed un prisma li devierebbe in ragione della lunghezza d'onda modificata.

Queste esperienze realizzano dunque il fenomeno ottico dei battimenti. Esse riescono tutte assai belle, poichè richiamano alla mente la periodicità e la natura vibratoria dei moti dell'etere, nello stesso modo che i battimenti sonori impongono sempre in certo modo l'idea di oscillazioni o di moti alternativi, anche in persone che ignorano la natura dei suoni.



SULLA VARIAZIONE NELLA RESISTENZA ELETTRICA DI UN FILO METAL-
LICO IN RELAZIONE AD ALCUNI DISTURBI PROVOCATI NE' SUOI
SISTEMI MOLECOLARI; DI GIUSEPPE GEROSA (1).

È riportato quì un esempio per ciascun filo:

Filo di rame (r = 0,24 mm).

sensibil.	pesi	corrente	deviaz.	media	sensibil.	pesi	corrente	deviaz.	media
$\frac{60}{10000}$ U.S.	gr.1350	diretta	0,95 0,93 0,95	0,94	$\frac{60}{10000}$ U.S.	gr.1350	diretta	0,95 0,94	0,95
	5400	»	0,92 0,95 0,94	0,94			vibrando		
	1350	»	0,93 0,95	0,94			»	0,07 0,08 0,09	0,08
		inversa	0,89 0,86	0,88			»	0,93 0,90	0,92
	5400	»	0,85 0,85 0,85	0,85			inversa	0,80 0,82	0,81
	1350	»	0,83 0,82	0,83			vibrando		
	5400	»	0,87 0,83	0,85			»	0,05 0,08 0,05	0,06
	1350	»	0,87 0,81 0,81	0,83			»	0,82 0,83	0,83
		diretta	0,98 0,95	0,97			diretta	0,87 0,89	0,88
	5400	»	0,98 0,98	0,98			vibrando		
							»	0,07 0,07 0,07	0,07

(1) *Continuazione e fine.* Vedi pag. 222 del volume precedente.

sensibil.	pesi	corrente	deviaz.	media	sensibil.	pesi	corrente	deviaz.	media
$\frac{60}{10000}$ U.S.	gr. 1350	inversa	0,82 0,83	0,83	$\frac{60}{10000}$ U.S.	gr. 5400	vibrando		
	5400	diretta	0,94 0,94	0,94				0,05 0,07 0,08	0,07
		vibrando					inversa	0,82 0,81	0,82
			0,07 0,07 0,07	0,07			diretta	0,94 0,95	0,95
		»	0,91 0,90	0,91			inversa	0,81	0,81
		vibrando				1350	»	0,82 0,83	0,83
			0,08 0,09 0,07	0,08			diretta	0,90 0,91	0,91
		inversa	0,84 0,83	0,84					

Filo di acciaio (r = 0,25 mm.).

sensibil.	pesi	corrente	deviaz.	media	sensibil.	pesi	corrente	deviaz.	media
$\frac{29}{10000}$ U.S.	klg. 2 $\frac{1}{2}$	diretta	0,68 0,70 0,72 0,72	0,71	$\frac{29}{10000}$ U.S.	klg. 10	inversa	0,70 0,69	0,70
	» 10	»	0,72 0,72	0,72		» 2 $\frac{1}{2}$	»	0,70 0,69	0,70
	» 2 $\frac{1}{2}$	»	0,70 0,69	0,70			diretta	0,78 0,77	0,78
	» 10	inversa	0,69 0,69	0,69		» 10	»	0,78 0,77	0,78
	» 2 $\frac{1}{2}$	»	0,69 0,69	0,69		» 2 $\frac{1}{2}$	»	0,78 0,74 0,80	0,77

Filo di ferro ricotto (r = 0,27 mm.).

sensibil.	pesi	corrente	deviaz.	media	sensibil.	pesi	corrente	deviaz.	media
$\frac{32}{10000}$ U.S.	gr. 1350	diretta	0,42 0,41	0,42	$\frac{32}{10000}$ U.S.	gr. 1350	vibrando		
	5400	»	0,44 0,44 0,42 0,42					0,18 0,19 0,07 0,09	0,13
	1350	»	0,45 0,45 0,42 0,42				diretta	0,40 0,40	0,40
		inversa	0,66 0,66 0,34 0,34 0,33 0,34				inversa	0,62 0,62 0,35 0,35 0,34	
	5400	»	0,42 0,42 0,36 0,37 0,37				vibrando		
	1350	»	0,52 0,52 0,33 0,34 0,35					0,17 0,15 0,16	0,16
	5400	»	0,40 0,40 0,38 0,38 0,38				»	0,39 0,38 0,38	0,38
	1350	»	0,41 0,41 0,37 0,37 0,37				diretta	0,65 0,65 0,39 0,38 0,36	
		diretta	0,69 0,69 0,40 0,39 0,34 0,39 0,40 0,39 0,40				vibrando		
	5400	»	0,43 0,43 0,41 0,41 0,41					0,09 0,10 0,15	0,11
							inversa	0,62 0,62 0,34 0,36 0,37	
	1350	»	0,41 0,41 0,39 0,39 0,39		5400	diretta	0,67 0,67 0,40 0,40 0,40		

sensibil.	pesi	corrente	deviaz.	media	sensibil.	pesi	corrente	deviaz.	media
$\frac{52}{10000}$ U.S.	gr.5400	vibrando			$\frac{52}{10000}$ U.S.	gr.5400	inversa	0,40 0,40	0,40
			0,13 0,10 0,11	0,11			diretta	0,65 0,45 0,43	0,65 0,43
		diretta	0,41 0,40	0,41				0,40	
		vibrando					inversa	0,66 0,40 0,39	0,66 0,40
			0,09 0,14 0,09	0,11		1350	»	0,45 0,37 0,37	0,45 0,37
		inversa	0,68 0,38 0,39	0,68 0,39			diretta	0,70 0,43 0,41	0,70 0,42
		vibrando							
			0,11 0,12 0,12	0,12					

Le deviazioni prodotte dall'induzione della spirale non presentano una sensibile variazione coll'invertire la corrente che attraversa il filo, sia esso d'acciaio o di ferro ricotto, sia che esso venga indotto da corrente colla stessa direzione o con direzione opposta a quella della corrente, che l'aveva indotto prima dell'inversione della corrente che lo attraversa.

Si è cercato poi di riconoscere se l'induzione della spirale faceva avvertire qualche variazione nella resistenza elettrica del filo, quando esso era sospeso verticalmente e veniva fatto vibrare col martelletto di sughero. (Il solenoide qui aveva un diametro di 22 mm. ed una lunghezza di 80 cm.). Ma atteso che era molto difficile di produrre una vibrazione ben netta ed evitare che il filo non estinguesse le oscillazioni contro le pareti del tubo, si ebbero dei risultati non troppo ben distinti. Però non si avvertì che l'induzione, sia momentanea che permanente, sia

dovuta a corrente diretta che inversa, arrecasse qualche disturbo o modificazione nella costituzione interna del filo tale che si rendesse poi sensibile colla percussione.

Da ultimo il filo si cimentò alla torsione mentre veniva teso con pesi differenti.

Per torcere il filo mi servii di una carrucola munita di larga gola e di un asse fisso abbastanza grosso, il quale era forato secondo la lunghezza nel suo mezzo. Il filo, teso verticalmente, attraversava il foro dell'asse e questo per un estremo era fissato alla morsetta del piatto, coll'altro rotava entro un anello raccomandato all'albero di ghisa mediante un braccio di legno. La torsione quindi del filo si effettuava tirando una funicella che si avvolgeva sulla gola della carrucola.

Esperimentando ora sul filo d'acciaio, di ferro e di rame, si avvertì come ad ogni torsione, sotto qualunque tensione, si verificò un aumento di resistenza, ed un decremento nella detorsione. Però non si potè stabilire alcuna legge numerica fra le variazioni di resistenza e le corrispondenti variazioni nella torsione sotto una data trazione, perchè era necessario forse per stabilir questo, di operare sovra fili di un diametro ben maggiore.

fra due elettrodi disposti perpendicolarmente alla lastra. Le tracce rimaste erano le consuete e sembravano come allungate ed ellittiche, con l'asse maggiore nel senso della fenditura. Sui bordi poi della fenditura mostravasi la sola zona scagliosa, più estesa quando prodotta da scintilla scattata fra palline che fra punte. Da ultimo appoggiai sopra una lastra di vetro A un'altra B perpendicolarmente, quindi disposi gli elettrodi sulle due facce della B e vi feci strisciar contro una scintilla così da venire a colpire la A; e su di essa rimase, dopo l'esperienza, una traccia deformata ed allungata secondo la linea di contatto fra le due lastre, e formata dalle solite zone. Detta traccia però mancava quando la B non era vicinissima alla lastra A.

Le tracce, come già si disse, sono di diversa larghezza, a seconda dell'energia della carica che le produce, ed ho cercato, con misure dirette, stabilire la relazione che passa fra queste due quantità. Le tracce furono osservate al microscopio, ad un ingrandimento di circa 15 diametri, e per mezzo della camera chiara ne fu schizzata su una carta la larghezza, compresa fra le due zone limitanti *gg*, indicate nella fig. 3^a, Tav. II. Queste zone viste a piccolo ingrandimento sono oltremodo nette e spiccate, così da permettere delle misure assai precise, che venivano sempre prese su tre o quattro punti di una stessa traccia. Qui di seguito sono riportate le misure di varie di codeste tracce incise da scintille di cariche diverse, ma di potenziali costanti, su pezzi di vetro di specchio, che non sempre erano state tagliate da una stessa lastra.

TABELLA I. (1)

N. bottiglie	Cariche C	Diametri ingranditi D	Diametri veri D ₁	Rapporti D ² ₁ : C
I. SERIE				
1	4	14,64	0,732	0,1340
2	8	29,99	1,499	0,2809
3	12	35,62	1,781	0,2643
6	24	43,88	2,194	0,2006
24	96	103,00	5,150	0,2763
II. SERIE				
1	4	10,4	0,520	0,0676
2	8	18,5	0,925	0,1068
4	16	28,2	1,410	0,1243
8	32	38,6	1,930	0,1164
III. SERIE				
1	4	25,53	1,277	0,408
2	8	29,98	1,499	0,285
4	16	37,83	1,891	0,224
12	36	73,00	3,650	0,278
24	96	109,67	5,484	0,3125

Nella tabella precedente sono riportati il numero delle bottiglie, le cariche, i diametri apparenti e reali delle tracce, e nell'ultima colonna i rapporti $D_1^2 : C$ fra i quadrati dei diametri veri e le cariche. Ora tai rapporti, abbenchè oscillino un po' fra loro pure se si considera dall'una parte che dette oscillazioni sono capricciose e saltuarie, e se si pon mente dall'altra alla grande differenza delle cariche adoperate, che variano da 1 a 24 nella prima ed ultima serie, e da 1 ad 8 nella seconda, noi vediamo che tai rapporti possono riguardarsi come approssimativamente costanti.

Dopo questi primi tentativi ripetei nuove misure e con maggiore accuratezza. Feci perciò incidere le varie tracce sopra una stessa faccia di una medesima lastra di specchio tagliata in di-

(1) Gli ingrandimenti adoperati furono i medesimi per ciascuna serie di misure, ma non dovettero essero i medesimi per le tre serie. Nel mio giornale non trovo indicazioni in proposito.

Lo specchio precedente, disposto come gli altri, mostra tanto nella prima serie come nella seconda, che il rapporto $D^2:C$ è costante: il quale risultato concorda con quello più sopra enunciato. Onde passando dai diametri alle sezioni delle scintille, potremo dire, nei limiti delle mie esperienze, che

La sezione di una scintilla congiuntiva prodotta da cariche a potenziale costante è proporzionale alle cariche stesse.

Quindi ripetei le stesse esperienze e le medesime misure sui fori fatti nella carta dalla scintilla eccitatrice unica, scattante tra fili di platino di un eccitatore isolato, con una branca fissa ed una mobile, la quale si spingeva contro la fissa, subito dopo avere unito l'eccitatore, per mezzo di contatti a mercurio, alla batteria carica. I risultati medi di tali misure sono qui in seguito indicati:

TABELLA IV.

Cariche C	Diametri dei Fori		Diametri medi D	Rapporti D² : C	Differenze da 7,58
	I	II			
I. SERIE					
2	3,9	3,1			
2	3,3	3,2	3,4	5,78	—1,71
3	4,9	4,7	4,8	7,68	+0,10
4	5,4	5,25	5,3	7,02	—0,56
5	7,0	6,8	6,9	9,50	+1,92
6	7,2	6,9	7,1	8,40	+0,72
8	9,4	8,8	9,1	10,35	+2,77
10	8,6	8,2	8,4	7,06	—0,52
12	7,8	8,4	8,1	5,47	—1,11
14	10,4	9,1	9,8	6,86	—0,72

media 7,58

differenza da
3,12

II. SERIE con carta oleata

4	33	3,2	3,25	2,64	-0,48
6	47	4,1	4,4	3,23	+0,11
8	45	4,5	4,5	2,53	-0,59
10	54	4,8	5,1	2,60	-0,52
12	68	6,7	6,75	3,80	+0,68
14	76	7,2	7,40	3,91	+0,79

media 3,12

I risultati della I. serie si riferiscono ai fori fatti nella carta più sopra indicata, e quelli della II. serie furono ottenuti adoperando la stessa carta stata prima oleata; ed in essa i fori furono sensibilmente più piccoli, forse perchè detta carta è più coibente. In entrambi le serie i rapporti $D^2:C$ sono, sebbene con minore regolarità che precedentemente, presso a poco costanti, specialmente se si pon mente che le deviazioni dalla media per una data carica non sono nelle due serie nè eguali nè nel medesimo senso, e quindi esse devono attribuirsi probabilmente ad errori d'esperienze: e perciò potremo dire, almeno come probabile, e nei limiti delle mie poche esperienze che:

Il quadrato del diametro dei fori praticati nella carta da scintille eccitatrici a potenziali costanti, o forse ancora che la sezione di esse, è proporzionale alle cariche stesse.

Ma è necessario di dire che pel piccolo numero di esperienze i precedenti risultati, e più specialmente gli ultimi, hanno bisogno di essere confermati da ulteriori ricerche.

Poscia volli determinare l'effetto dei potenziali sulla larghezza delle tracce, e perciò ne incisi varie su di una istessa faccia d'una medesima lastra, per mezzo di scintille congiuntive prodotte da una carica di 36 unità comunicate successivamente ad un diverso numero di bottiglie eguali. Le misure delle tracce eseguite col metodo solito, della camera chiara, dettero i risultati seguenti:

TABELLA V.

Cariche 36. Elettrodi fili platino — Ingrandimento 20 diametri				
N. Bottiglie	Figure misurate	Diam. ingranditi D	Medie di D	Diametri veri <i>d</i>
8	I	72	70,27	^m 3,51
		71,5		
		72,1		
	II	73,0		
		72,2		
		72,8		
	III	66,5		
		65,3		
		68,0		
16	I	68,5	65,71	3,29
		70,4		
		69,0		
	II	64,2		
		68,0		
		69,1		
	III	68,0		
		60,0		
		61,0		
20	I	61,3	58,60	2,93
		56,5		
		58,1		
	II	56,6		
		60		
		60		
	III	60,5		
		59,5		

Le misure seguenti furono ricavate da una seconda lastra:

8	I	77,2	79,57	^m 3,98
		77,7		
		80,0		
	II	78,0		
		81,0		
12	I	83,0	70,47	3,52
		65,5		
		65,3		
	II	66		
		64		
		69,8		
	III	73,3		
		71,5		
		76		
16	I	74	63,97	3,20
		74		
		66		
		62,9		
		63		

Dalla tabella precedente risulta chiaro che i diametri delle tracce vanno lentamente, ed assai regolarmente decrescendo, col potenziale delle cariche.

Queste medesime esperienze volli poscia ripetere per mezzo dei fori praticati dalle scintille nella carta; e perciò operando sulla scintilla congiuntiva con carica costante e potenziali diversi, ottenni i dati seguenti:

TABELLA VI.

I. SERIE			
Cariche 8; scintilla congiuntiva 5 ^{mm} , tra fili di platino			
N. Bottiglie	Diametri dei fori		Diametri medi D
	I	II	
4	10,9	11,2	11,1
5	10,6	9,0	9,8
6	8,6	9,8	9,2
8	9,3	7,3	8,3
10	8,3	7,1	7,7
12	5,9	5,8	5,9
14	7,66	7,6	7,6

II. SERIE

Scintilla congiuntiva 2^{mm},5, fra palline ottone di 12^{mm},5 di diametro

4	10,7	11,5	11,10
6	14,7	11,95	13,33
8	11,0	12,0	11,50
10	10,6	11,1	10,85
12	11,1	9,8	9,95
14	7,0	8,8	7,90

Le due serie di esperienze che precedono mostrano che i fori fatti nella carta, dalla scintilla congiuntiva di una carica costante (8 unità), vanno lievemente decrescendo col decrescere del potenziale della carica. Questi risultati adunque, ottenuti con metodo affatto diverso dal precedente, conducono alla medesima conclusione; che perciò acquista maggiore probabilità. E passando, sia dalle tracce, sia dai fori fatti dalle scintille, alla grossezza della scintilla che li produssero, potremo dire che:

La sezione delle scintille di una data carica decresce lentamente col decrescere del potenziale di essa.

Intorno però a tutte codeste misure, io mi propongo eseguire ulteriori indagini.

RIASSUNTO.

Le frange o scintille luminose che si producono nei condensatori che si caricano o scaricano istantaneamente, alterano la loro vernice e vi rimangono lievi impronte. Se si fa strisciare una poderosa scintilla d'una batteria su una appropriata lastra da specchio, vi si produce una traccia assai vistosa, e che risulta di più zone a diversi colori; le quali viste con un ingrandimento di 20 a 30 diametri, sono le seguenti principali:

1.° Una zona assiale *scagliosa*, formata da vetro quasi terso, tutto screpolato superficialmente, così da formare una specie di pavimento a lastre irregolari poligonali.

Quindi procedendo verso uno dei lati (la traccia è simmetrica rispetto alla zona scagliosa) si ha:

2.° Una zona grigia punteggiata, formata come da tanti piccoli globettini irregolarmente disseminati e confitti nel vetro screpolato;

3.° Una zona gialla punteggiata, costituita di corpiciattoli più piccoli, più fitti e più regolarmente disseminati dei precedenti, e confitti del pari nel vetro screpolato;

4.° Una zona come di vetro appannato;

5.° Una zona *limitante*, formata come da una striscia di vetro superficialmente rotto, con la quale pare la traccia si termini;

6.° Una zona ultima bianca.

A forte ingrandimento (700 diametri circa) la zona 4.° si vede essere formata come da vetro solcato da linee curve, che s'intrecciano a forma di rete, nella quale trovansi pochi di quei corpiciattoli notati nelle zone punteggiate. La 6.° zona pare risulti da polviscolo, forse di vetro, spintovi dalla scintilla; la traccia della quale perciò si terminerebbe colla zona limitante. Le altre zone viste a forte ingrandimento non mostrano particolarità degne di nota.

RIVISTA

Comptes Rendus.

(Fine del secondo semestre, 1883).

N.° 19. — M. QUET. *Sul potenziale della forza di induzione dovuta ad un solenoide chiuso, la di cui corrente varia di intensità. Analogia con un teorema di elettromagnetismo. Esperienza del Felici.* — Nella anzidetta esperienza un solenoide chiuso induce una corrente sopra un circuito filiforme, chiuso, quando la sua corrente varia di intensità; ed ora l' A. trova la ragione di tal fatto nel teorema seguente, che egli deduce dalla sua nuova teoria.

« Il potenziale della forza di induzione dovuta ad un solenoide chiuso, e la di cui corrente varia di intensità, è proporzionale, in parità di circostanze, all'angolo sotto il quale la direttrice è vista dal punto di applicazione della forza ».

Come già facemmo osservare altra volta, l' A. ha pubblicate nei *Conti resi* molte Note, o sunti, della sua teoria e delle sue applicazioni a più casi particolari, le quali Note si collegano fra loro per le formule diverse, talchè un chiaro sunto anche della presente Nota ci resterebbe troppo difficile; ma ci proponiamo di dare in seguito un sunto di quella nuova teoria.

M. G. LE GOARANT DE TROMELIN. — *Sopra un nuovo galvanometro aperiodico.* — Se ad un galvanometro astatico si aggiunge un terzo ago, al di sotto del telaio, parallelo agl' altri due, e volto coi poli di nome contrario a quelli dell' ago che gli sta sopra, si triplica la sensibilità del galvanometro. Di più, l' A. rende il telaio mobile, e fissi gli aghi. Un tale galvanometro è costruito dalla casa Breguet; ma invece di aghi vi sono tre calamite a ferro di cavallo, a branche molto vicine, e sono poste orizzontalmente, l'una al disopra dell'altra, distanti di cinque millimetri. Il telaio gira attorno ai due poli della calamita di mezzo, avendo spazio per 20° di deviazione da ogni lato. Il filo del telaio è leggiero, ed è normale all'asse delle calamite; la corrente gli arriva dal filo di sospensione. È completamente aperiodico, e delicatissimo.

M. G. FOUSSEREAU. *Sulla resistenza elettrica di varie sostanze isolanti.* — Nei *Conti resi* del Luglio e del Marzo 1883 l'A. ha descritto il metodo suo per la misura di quella resistenza, ed ora presenta alcuni risultati. Per la porcellana essa è dello stesso ordine di grandezza che per il vetro a base di piombo. In milioni di mégohms, e per centimetro cubo, è di 751, a 60°, e di 0,052 a 180°. Per lo zolfo, fuso e poi raffreddato lentamente allo stato prismatico, si ebbe 7,39 a 112°, e 3930 a 69°. La resistenza del fosforo solido è di 84000 mégohms a 15°, e di 15600 a 42°. Passando allo stato liquido lo zolfo diventa 40 volte più conduttore. Facendo variar la temperatura lentamente da 114° a 150° onde lo zolfo prenda il suo stato definitivo, dopo si osserva che la resistenza diminuisce elevando la temperatura, e cresce al diminuire della temperatura. Se lo si lascia cristallizzare in prismi e poi si rifonde, si osserva, per le stesse temperature, una diminuzione di resistenza. Altre secondarie osservazioni dello stesso genere, per lo zolfo e pel fosforo, sono contenute nella Nota dell'A.

20. — M. E.-H. AMAGAT. *Sui pirometri a circolazione di acqua.* — Quando in un tubo metallico a pareti sottili e ad alta temperatura, si fa passare una corrente di acqua, questa non si riscalda che di pochi gradi, anche per una velocità molto moderata. Su questo principio l'A. fece costruire un pirometro. L'A. vuol precisare la sua priorità. Le sue esperienze datano dal 1880, e prese un brevetto nel febbraio 1882, ma seppe che il Violle aveva avute le stesse idee e fatte delle esperienze, delle quali però non fece conoscere i risultati; e inoltre seppe che quando egli, l'A. cominciava le sue ricerche, M. di Saintignon aveva preso un brevetto per un simile pirometro. Però l'A., senza descrivere maggiormente alcun pirometro, accenna alcune differenze di costruzione fra il suo e quello del Saintignon. L'A. conclude che tali pirometri daranno all'industria molta utilità. Ne funzionò uno con molto successo nella manifattura di Sevres.

M. L. SIMONOFF. *Sopra un fotometro ottico.* — È un piccolo cannocchiale fatto di tre tubi, che scorrono l'uno dentro l'altro. Nella estremità anteriore del secondo tubo è uno schermo con cifre che si devono leggere per trasparenza; e la estremità anteriore del primo tubo ha un porta diaframmi di varie grandezze. Volgendo l'istrumento verso la sorgente luminosa, si guar-

$$W = \frac{2\pi LPN}{60} - 0$$

« N è il numero dei giri per minuto. W è zero perchè lo è N;
 « ma noi possiamo far le operazioni sopprimendo N, ed avremo
 « la espressione

$$\frac{\pi LP}{30}$$

Questa espressione è ottenuta con una corrente i , e dunque per l'unità di corrente dovremo dividerla per il valore di i . Il valore $\pi LP/30.i$ è chiamato dall' A. la *costante statometrica K* della macchina. Quando poi la macchina funzionerà, il lavoro sarà espresso sempre da $W = KIN$, I essendo la corrente ed N il numero dei giri realmente eseguiti al minuto.

21. — M. CAILLETET. *Produzione di bassissime temperature per mezzo di apparecchi continui.* — La rapidissima evaporazione dell'etilene liquido proiettato sopra il corpo a raffreddarsi, non lascia tempo a quest'ultimo di mettersi in equilibrio di temperatura con l'etilene stesso. Per evitare tal inconveniente l' A. ha un cilindro di acciaio, perfettamente chiuso, e con entro un serpentino di rame le di cui estremità sporgono fuori dal cilindro. L'etilene si fa espandere nel cilindro e sopra il serpentino, per mezzo di una chiavetta speciale. Due tubi di rame penetrano nel cilindro; l'uno in comunicazione con la valvola di aspirazione di una pompa a stantuo di mercurio, la quale può fare un vuoto quasi perfetto, e l'altro tubo riceve l'etilene compresso dalla pompa, e lo riconduce, raffreddato dal cloruro di metile, al disopra della chiavetta di espansione. Così si ha un ciclo chiuso che si può ripetere a piacere. L' A. spera di ottenere così ossigene liquido in gran quantità, ed altri interessanti risultati.

M. F. GRIVEAUX. *Sull' energia elettrochimica della luce* — L' A. non fa che una descrizione in termini generali del suo apparecchio, perchè le sue esperienze non sono terminate. Esso in luogo di misurar le correnti, misura le forze elettromotrici prodotte. Segue il metodo del *potenziometro* di Clark; come pila di confronto ha degl'elementi Latimer-Clark. Una pila Daniell serve pel circuito chiuso; e le pile sono nel ghiaccio in fusione per te-

nerle a temperatura costante. Un elettrometro Lippmann nel circuito della pila fotochimica, serve per le misure. Un galvanometro Ruhmkorff è nel circuito della pila Latimer Clark. Le due resistenze il di cui rapporto deve dare il rapporto fra le forze elettromotrici, sono date da due reostati Poulliet a filo di platino, e munite di scale divise in millimetri, con nonii. Le lamine sono in argento puro; e per sensibilizzarle sono immerse, come elettrodi positivi, in una soluzione a un decimo di bromuro o di ioduro di potassio, stando di fronte ad una lamina di platino della stessa estensione. La corrente è data da un elemento Daniell a soluzioni sature di solfato di rame, e di solfato di zinco, filtrate.

22. M. MASCART. *Sopra una bussola magnetica ad induzione.* — È noto l'induzionometro di Weber per determinare la inclinazione magnetica; ma ora l'A. per il medesimo scopo, parte dal fatto che correnti indotte in un tale apparecchio debbano esser nulle quando l'asse di rotazione è parallelo alla direzione della forza magnetica. Per seguire questo suo metodo il Mascart fece costruire un opportuno apparecchio, che è facilmente trasportabile e che ha una precisione come quella ottenibile da una buona bussola di Brunner.

MARCEL DEPREZ. — *Sul sincronismo elettrico di due moti relativi, e della sua applicazione per una nuova bussola elettrica.* — Due corpi ruotano, con differenti velocità, attorno ad uno stesso asse: trovare il modo di riprodurre il loro spostamento relativo, a distanza ed in un numero qualunque di punti diversi per volta, ottenendo un sincronismo assoluto. Ciò detto, l'A. passa a descrivere come egli ha risoluto il quesito, servendosi di un anello Pacinotti posto come per l'ordinario fra i poli di un magnete, il quale però è mobile esso pure attorno l'asse dell'anello; e servendosi di un altro apparecchio chiamato *comparatore anulare* pure inventato dallo stesso autore, nel 1881. Ma di tale descrizione, fatta senza figure, già faticosa e non facile a intendersi, un sunto non sarebbe possibile. •

E.-E. BLAVIER. *Studio delle correnti telluriche.* — Il Congresso 1881 degli elettricisti aveva già raccomandato questo studio, che fu eseguito dall'A. mercè alcune linee telegrafiche sotterranee di recente costruite dal Governo. I risultati importanti

di S dei valori positivi e negativi: cioè vi ha doppio strato elettrico.

Per più chiarezza, l'A. fa una costruzione grafica, prendendo per asse delle x una linea retta normale ad S, ed indicando i potenziali in A e in B con due rette parallele alla x ad altezze proporzionali a V_1 e V_2 . Ma queste due linee, rette fino a che son lungi sufficientemente da S, saranno in prossimità dalla regione di S riunite coi loro estremi a e b da una linea curva che presenterà almeno un punto di inflessione I.

Sia un canaletto normale ad S, di sezione σ e di lunghezza dx , la quantità di elettricità che vi è contenuta sarà

$$dq = \rho \sigma dx = - \frac{\sigma}{4\pi} \frac{d^2 V}{dx^2} \cdot dx .$$

Indichiamo con x_1 la ascissa corrispondente al punto di inflessione, e con $\left(\frac{dV}{dx}\right)_1$ la derivata del potenziale in questo punto; si avrà

$$q = - \frac{\sigma}{4\pi} \int_{-\infty}^{x_1} \frac{d^2 V}{dx^2} dx = - \frac{\sigma}{4\pi} \left(\frac{dV}{dx}\right)_1 ,$$

poichè $\frac{dV}{dx}$ è nulla alla superficie lungi dalla superficie S. Da ciò si vede che quanto più è rapida la caduta del potenziale, quanto più la tangente d'inflessione fa con le x un angolo vicino all'angolo retto, e tanto più q si avvicina all'infinito. Dunque nei doppi strati devono essere enormi le quantità di elettricità. Se malgrado ciò la forza $\frac{dV}{dx}$ l'equilibrio esiste, bisogna che vi sia un'altra causa, non elettrica, che vi faccia equilibrio. Volta la attribuì all'azione della materia sulla elettricità, e l'A. inclina verso quella ipotesi, giudicando però necessario che sia estremamente piccolo il raggio di attività della materia sulla elettricità. In prossimità di S, che separa sostanze eterogenee, la risultante delle azioni dei due corpi A e B può non esser nulla, e per l'equilibrio può esser necessaria una tale distribuzione della elettricità. L'Helmholtz ammise e sviluppò la ipotesi di Volta, e il Clausius

M. CH. CLAVERIE. *Elettrometro capillare orizzontale.* —

È un tubo verticale V, di vetro con mercurio, e largo circa mezzo centimetro, e nel fondo ha saldato un tubo capillare, largo un millimetro. Quest'ultimo, dopo esser disceso verticalmente di uno o due centimetri, si piega e risale pure dritto verticalmente, fino ad un'altezza circa uguale a quella del mezzo del tubo più largo, e poi si piega un'altra volta ma orizzontalmente, in linea retta. Finalmente, piegandosi ancora, finisce per immergere la sua estremità nell'acqua acidula di una piccola provetta, aperta, con mercurio nel suo fondo, attraverso il quale passa un filo di platino per le comunicazioni col mercurio. Il tubo V ha pure il suo filo di platino. La parte orizzontale del tubo capillare ha una divisione in millimetri. Il tutto è sopra una tavoletta a viti calanti, e si prepara come il noto elettrometro del Lippmann. L'A. dimostra che con questa nuova forma si può con le viti calanti, regolare l'elettrometro in modo, di fargli acquistare una data sensibilità determinata.

M. A. BERTIN. *Nota sulle frangie delle lamine cristallizzate uniasse, e sopra la loro proiezione con la luce monocromatica.* — Alcune di queste frangie sono ordinariamente neglette dagli studiosi, sia per la complicazione del calcolo, sia perchè non si vedono con la luce ordinaria; e sono le frangie delle lamine oblique all'asse. Lo scopo di questa Nota, non breve, è di mostrare che quel calcolo può molto semplificarsi e introdursi nell'insegnamento; e che quelle frangie non solo sono facilmente osservabili, ma che si possono anche proiettare con la luce monocromatica.

X.

SUNTI per ANNIBALE STEFANINI.

Ann. der Phy. und. Chem. von G. Wied. XXI, 1884. N° 1 e 2.

O. FRÖLICH. *Misure del calor solare.* — Il metodo delle ricerche consiste nel misurare, con la pila termoelettrica già adoperata nelle esperienze sulla temperatura dello spazio ec. (*Pogg. Ann. Ergsbd. 8. 1877*), e con un galvanometro astatico a specchio, il calor solare che giunge sulla terra, ad altezze diverse del sole, e nel dedurne la quantità di calore che giungerebbe sulla terra se l'atmosfera non esistesse. Per ridurre in misura

assoluta le indicazioni della pila termoelettrica, furono adoperate superfici di potere emissivo costante, scaldate a 100°: l'errore delle misure era al più di 1 per %.

I risultati delle esperienze mostrano che anche quando il cielo è sereno l'assorbimento dell'atmosfera può esser molto diverso, e che il calor solare non è costante, ma presenta invece notevoli diminuzioni in corrispondenza degli aumenti nelle macchie solari.

A. W. VELTEN. *Il calorico specifico dell'acqua*. — Ricerche fatte col metodo dei miscugli e della fusione del ghiaccio, portano l'A. a concludere che il calorico specifico medio dell'acqua ha un massimo fra 0 e 7°,31; fra 7,31 e 10°,87 diviene del 3 % per %, minore; fra 15 e 20° ha un altro massimo, verso 40° ha un minimo; da 40° fino a 100 torna a crescere, ma restando sempre inferiore al massimo che ha fra 0 e 7°,31.

La formula dedotta dalle osservazioni di 4 diversi sperimentatori, e che dà il calorico specifico medio dell'acqua fra le temperature t e T (escluse quelle inferiori a 18°), è, secondo il Velten:

$$c_{T,t} = 1 + \frac{\alpha}{2}(T + t) + \frac{\beta}{3}(T^2 + Tt + t^2) + \frac{\gamma}{4}(T^3 + t^3)(T + t)$$

ove

$$\frac{\alpha}{2} = -0,0007312756, \quad \frac{\beta}{3} = +0,0000079327, \quad \frac{\gamma}{4} = -0,00000002679$$

Le temperature, nelle esperienze eseguite, furon misurate col termometro ad aria. Le determinazioni dell'A. concordano con quelle del Regnault.

E. PIRANI. *Sulla polarizzazione galvanica*. — L'A. riassume una sua Memoria (Berlino 1883) nella quale ricerca se la natura chimica degli elettrodi abbia influenza sull'andamento della polarizzazione.

Il valore della polarizzazione era misurato a corrente primaria chiusa; il metodo adoperato differisce perciò da quelli precedenti nei quali con interruttori più o meno adattati si misurava il valore della polarizzazione in un solo istante. L'elettrolita adoperato era acqua acidulata debolmente con acido solforico. I risultati di molte ricerche sono i seguenti:

Nelle condizioni ordinarie la polarizzazione dipende dalla natura degli elettrodi. Tal dipendenza si ha sia nei valori a corrente chiusa, sia nel decremento dopo l'apertura; sussiste anche se il liquido è scaldato. Talchè non si può attribuire alla formazione di H_2O_2 o di ozono, e non cessa adoprando per anodo del palladio saturo d'idrogeno che assorba l'ossigeno che si rende libero. La separazione degli elettrodi e l'impedimento opposto alla diffusione interna dei gas elettrolitici, non toglie quella dipendenza, che sussiste anche separando gli elettrodi con un vaso nel quale si trovi del liquido bollente. Non si ha nessuna variazione col difendere l'elettrolita dall'aria atmosferica mediante il benzolo, e delle misure fatte a completa esclusione dell'aria e asportando continuamente i gas elettrolitici, mostrano sempre una dipendenza dalla natura degli elettrodi.

Paragonando i propri risultati con quelli degli sperimentatori che l'hanno preceduto, l'A. è condotto a considerare anche la questione delle pile incostanti.

W. HITTORF. *Sulla conducibilità elettrica dei gas.* — Di queste ricerche sarà dato conto quando ne sarà ultimata la pubblicazione.

A. OBERBECK. *Sulle oscillazioni elettriche, e specialmente sulla polarizzazione che esse producono* (4^a Memoria). — Per interpretare i risultati delle esperienze che il sig. R. Falck, in seguito alle precedenti ricerche dell'A. eseguì sulla polarizzazione di 6 metalli mediante idrogeno da una parte, e ossigeno, cloro, bromo e iodio dall'altra, l'Oberbeck espone nuovamente la teoria del metodo seguito da esso e dal sig. Falck, indipendentemente peraltro dall'ipotesi del Kohlrausch che fu ammessa nei lavori precedenti, e che consisteva nel ritenere che la polarizzazione delle lastre metalliche fosse proporzionale alla densità degli strati gassosi depositi su di esse, o alla quantità di elettricità che ne ha attraversato l'unità di superficie, perchè tale ipotesi vale soltanto per strati gassosi infinitesimi.

L'A. trae delle conseguenze che riguardano il valor limite della polarizzazione per depositi molto sottili. Ne risulta che gli elettrodi polarizzati non si posson considerare come condensatori di capacità costante. — Secondo il Blondlot la capacità limite per cariche infinitesime (capacità iniziale) dovrebbe essere indi-

pendente dalla natura del liquido; ma pare che ciò non sia esatto. Dai valori della capacità iniziale si trova che lo spessore del doppio strato elettrico al contatto fra metallo e liquido varia molto col metallo, e poco col liquido. P. es. pel nichel esso è $\frac{1}{981300}$ mm., e per l'argento $\frac{1}{11010000}$ mm.

A. TOEPLER. *Determinazione dell'intensità orizzontale del magnetismo terrestre con l'uso della bilancia.* — Nel mezzo del giogo di una bilancia sensibile è fisso un magnete, la proiezione del cui asse sul piano di oscillazione della bilancia fa un angolo α colla normale al giogo condotta in quel piano. Si disponga il piano di oscillazione nel meridiano magnetico, e i due piatti essendo carichi dei pesi Q_0 e Q_1 , il giogo sia inclinato dell'angolo γ . Si ruoti la bilancia di 180° , e mediante i pesi Q_0 e Q_1 si riconduca l'inclinazione del giogo ad esser di nuovo γ ; allora se il magnete è nel piano di oscillazione e α è piccolissimo, dalle equazioni generali dell'equilibrio della bilancia nei due casi si deduce con grande approssimazione

$$HM = \frac{1}{2} (Q_1 - Q_0)l$$

ove H è la componente orizzontale, M il momento magnetico, ed l la lunghezza del braccio cui sono stati applicati i pesi Q_1 e Q_0 successivamente.

Ponendo il piano d'oscillazione nella direzione Est-Ovest, la bilancia è soggetta alle variazioni della declinazione, e può misurarle.

Come col metodo bifilare proposto dal Kohlrausch, anche con la bilancia del Toepler è possibile determinare contemporaneamente il prodotto e il quoziente delle quantità H e M .

Le esperienze dell'A. per la determinazione di H , quantunque non potute eseguire nelle condizioni più adattate, hanno dato risultati assai soddisfacenti.

W. VON BEZOLD. *Sulla dipendenza fra la temperatura di un filo incandescente e la composizione della luce che esso emette.* — Un filo di platino posto orizzontalmente nella punta della fiamma di un bruciatore Bunsen presenta nel mezzo una porzione incandescente bianca, alle cui parti stanno porzioni rosse via via meno luminose. Se si osserva il filo mediante un prisma con lo spigolo rifrangente orizzontale, si ha uno spettro simile a

quello dovuto a una fiamma triangolare che avesse la base rossa e il vertice violetto. Se il filo si abbassa in modo che una porzione ne entri nella parte meno calorifica della fiamma, lo spettro è simile a quello di una fiamma che avesse una base rossa molto estesa e due vertici violetti.

L'esperienza può servire a dimostrare assai semplicemente il fatto già noto che i raggi che sono ultra rossi per intensità calorifica moderata, diventano visibili con l'aumento della temperatura.

E. KETTELER. *Sulla critica del sig. Voigt.* — L' A. replica alle osservazioni che il Voigt, (*Wied. Ann.* 1883) fece alle di lui teorie della luce e della doppia refrazione.

S. CZAPSKI. *Sulla variabilità termica della forza elettromotrice delle coppie galvaniche e sulla sua relazione con l'energia libera delle medesime.* — Da considerazioni teoriche e da esperienze speciali, Braun e Wright furono condotti a concludere esservi delle pile nelle quali la forza elettromotrice è minore, altre nelle quali è maggiore di quella che sarebbe indicata dalle variazioni dell'energia chimica che la determinano.

L'Helmholtz ha stabilito teoricamente che quelle pile che non trasformano tutto il lavoro chimico in corrente devono avere una forza elettromotrice decrescente all'aumentare della temperatura; e inversamente, quelle che eseguono del lavoro a spese di una parte della propria quantità di calore, devono avere una forza elettromotrice decrescente colla temperatura.

Scopo dell'A. è stato di verificare questa proposizione. Le esperienze furon fatte misurando col metodo di compensazione del Du Bois Reymond la forza elettromotrice di diverse pile non polarizzabili, come per es. di quella formata con Zn nel Zn Cl_2 , e Ag nel Ag Cl , determinando la differenza fra il lavoro della corrente e quello equivalente al calore svolto nella pila dai processi chimici, e paragonandola col valore dedotto teoricamente per tal differenza.

Per la mancanza di cognizioni esatte sulla termochimica, i risultati ottenuti non hanno potuto dare una dimostrazione quantitativa del teorema accennato; ma tutte le esperienze eseguite hanno mostrato che la differenza osservata è sempre nel senso indicato dalla teoria.

due punti, che si trovano a temperature diverse, di un conduttore omogeneo, e la differenza del calore svolto da una corrente che passa in un conduttore disugualmente riscaldato, a seconda del senso della corrente, sono spiegabili soltanto colla sua teoria. L'A. invece dimostra che quei fatti si spiegano benissimo con la teoria del Clausius, e che invece non si spiegano con quella del Kohlrausch se non ammettendo che la legge di Avenarius e Tait sia giusta in qualunque intervallo di temperatura. L'esperienza non ha ancora deciso se tal legge valga per qualunque temperatura: ma all'A. ciò sembra inverosimile a motivo delle profonde modificazioni che alcuni metalli subiscono per forti riscaldamenti o raffreddamenti. Anche astraendo da ciò pare che la teoria di Kohlrausch sia in contraddizione con le leggi della termodinamica, e da tutto questo il Budde conclude che essa debba abbandonarsi per tornare a quella di Clausius, che spiega benissimo tutti i fatti conosciuti.

H. LORBERG. *Sulla espansione elettrica dei condensatori.* — Le esperienze fatte dal Quincke sull'espansione elettrica di condensatori di vetro, sferici e cilindrici, furono confrontate con la teoria da Quincke stesso e da Boltzmann, e fra l'esperienza e la teoria furono trovate grandissime differenze non spiegabili neppure con la grande incertezza nei valori adoperati per le costanti che entrano nelle formule. Tali divergenze non infirmano però la teoria che di quel fenomeno dettero Helmholtz e Korteweg, perchè alla *costante di dielettricità* il Quincke ha attribuito un significato non giusto; per di più sono state trascurate le forze interne, e non è permesso adoprare, come ha fatto il Quincke, senza convenienti modificazioni le formule del Lamé. — L'A. inoltre, per discutere le osservazioni del Quincke, col metodo impiegato da Helmholtz deduce le espressioni generalizzate del Korteweg per le pressioni elettriche che agiscono in un dielettrico.

B. WEINSTEIN. *Sul calcolo del potenziale di rocchetti.* — In questo lavoro l'A. espone: le equazioni differenziali generali per l'energia potenziale di un campo magnetico su un rocchetto, specialmente per quella reciproca fra due rocchetti; nuove formule per il potenziale mutuo di due correnti circolari coassiali; una critica delle formule date dal Maxwell pel potenziale di un rocchetto su se stesso, indicando come tali formule devon modifi-

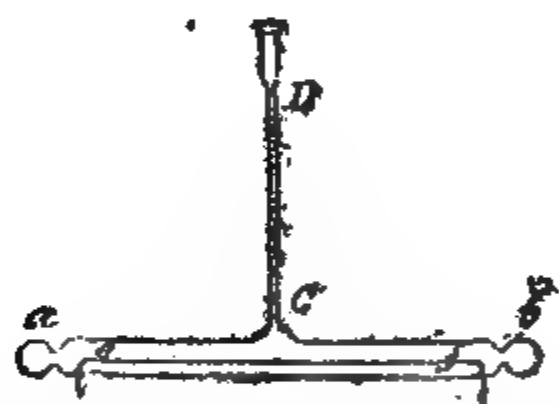
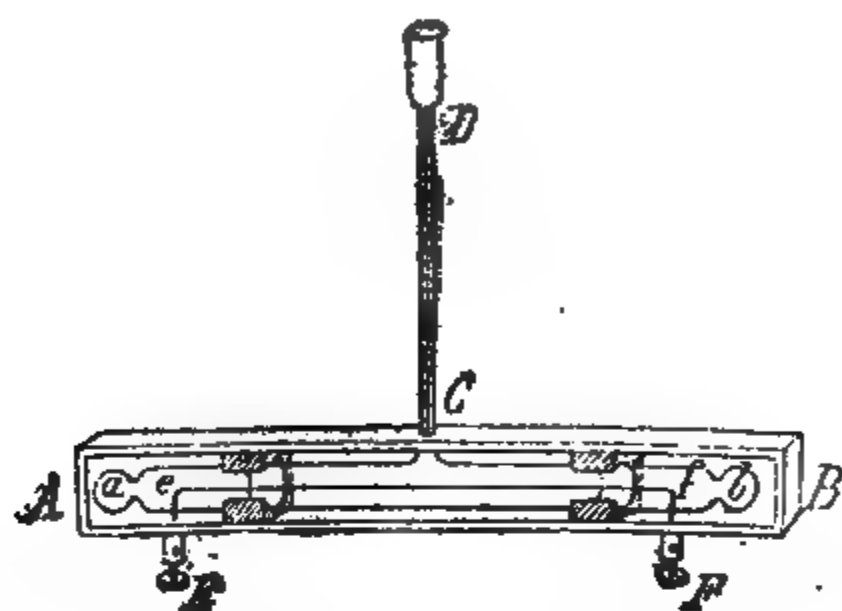
1,1183 mg. di argento, ovvero 0,3281 mg. di rame, e decompone 0,09328 mg. di acqua. Gli A. ritengono che anche nella combinazione d'errori più sfavorevole, i risultati trovati sieno esatti a meno di $\frac{1}{1000}$.

H. T. EDDY. *Sul calorico raggiante*. — (*Science*. Dec. 1883, Genn. 1884).

V. WOOD. *Idem*. — (*Science*, Genn. 1884).

G. F. FITZGERALD. *Idem*. — (*Science*, 1884). — L'Eddy aveva allegato una eccezione al secondo principio della termodinamica colla seguente disposizione. S'immagini due corpi A e B, fra i quali sieno situati tre dischi o diaframmi, muniti di certe aperture e riflettenti totalmente il calore. Questi diaframmi si suppongano fissati sopra un asse comune e ruotino intorno a questo con velocità costante. L'esperienza avvenga nel vuoto. Se le dimensioni e la velocità di rotazione sono tali, che le aperture praticate nei dischi si spostino considerevolmente, durante il tempo che il calore raggiante impiega a percorrere lo spazio che separa i dischi medesimi; si potranno disporre le aperture in modo che i raggi provenienti da A possano pervenire in B, mentre quelli provenienti da B verso A rimangano intercettati e riflessi dai diaframmi. Quindi, secondo l'Eddy, se si suppone B più caldo di A, si avrebbe un passaggio di calore da un corpo più freddo ad uno più caldo senza dispendio di lavoro. Il Wood, e il Fitzgerald, dimostrano che analizzando il fenomeno, si riconosce che l'eccezione è semplicemente apparente; ma l'Eddy continuando la polemica sul soggetto, sostiene sempre la possibilità del fenomeno.

S. TOLVER PRESTON. *Una spiegazione dinamica della gravitazione*. — (*Wien. Ber.* 1883). — L'A. per spiegare la gravitazione, fa l'ipotesi che l'etere sia un gas finissimo, nel senso della teoria cinetica dei gas, il di cui medio cammino molecolare sia grande in confronto delle distanze planetarie, e i di cui atomi, numerosissimi, abbiano un diametro infinitamente piccolo. Le molecole corporee nel concetto dell'A. sarebbero scheletri vuoti formati come da asticelle, cosicchè l'etere le potrebbe traversare facilmente, e solo una piccola parte, proporzionale alla ossatura o massa della molecola, ne rimarrebbe rattenuta. Perciò ogni molecola intercetterebbe a ciascun'altra una certa quantità di quel-



K

ASTORIA, OREGON
TILDEN FOUNDATION

we Cimento t XV

Fig 4

NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX
TILDEN FOUNDATION

Uno stesso galvanometro serve per l'inducente e per l'indotta. Per osservare l'inducente (fig. 1) la pila P è chiusa dal filo inducente I e dal campione x da misurare, oltre che dai necessari fili di congiunzione e da una cassetta di resistenza R . Dalle estremità A, B del campione x parte un ramo derivato, che comprende il filo indotto II , il galvanometro G , una cassetta di resistenza S ed i fili di congiunzione.

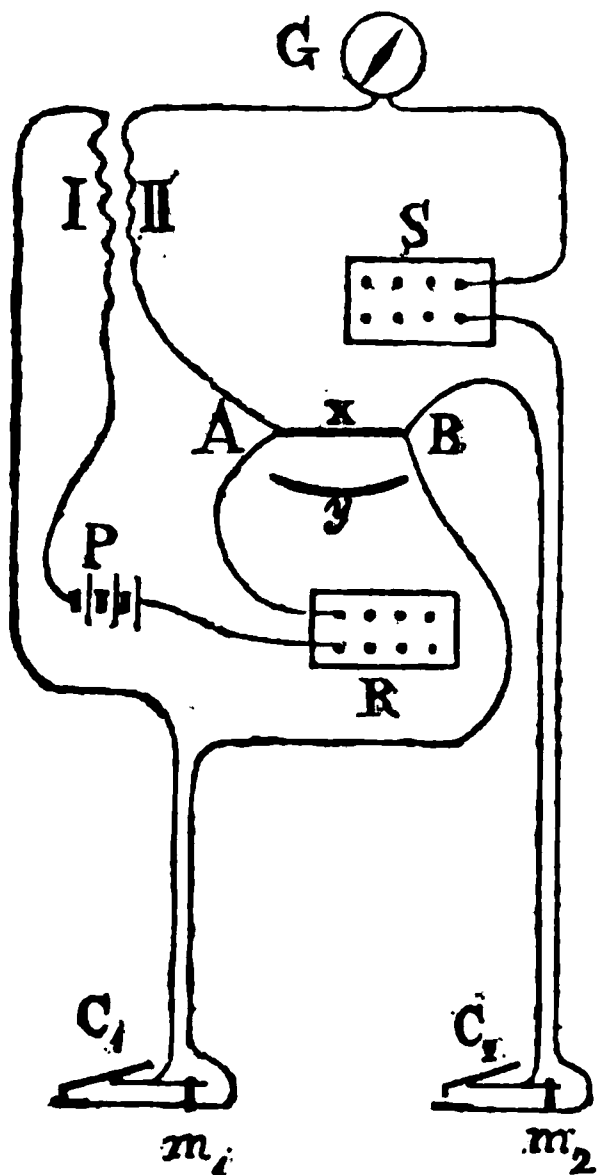


Fig. 1.

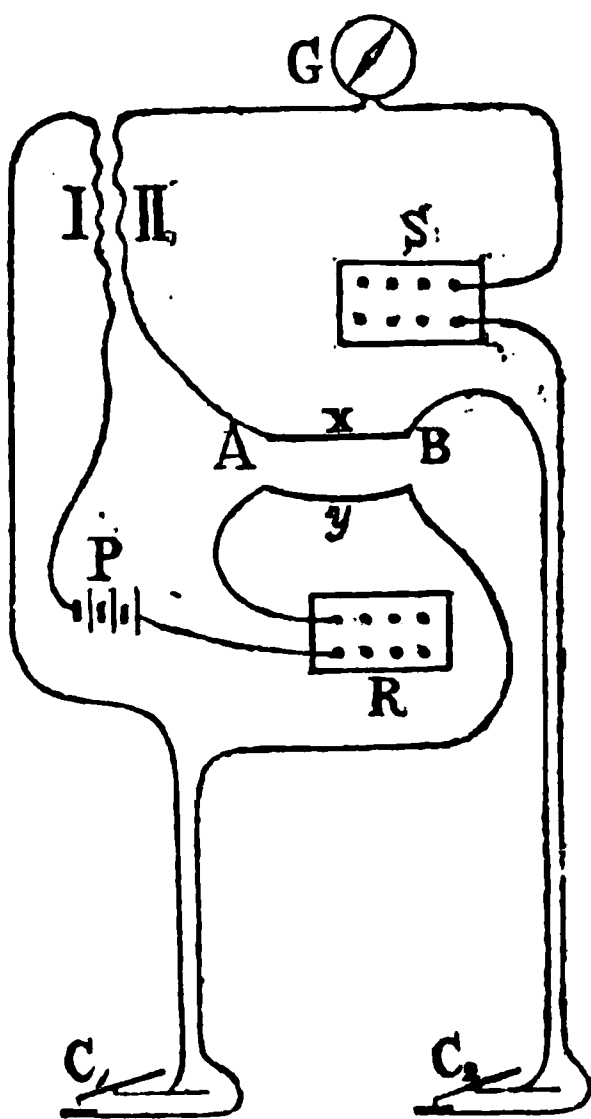


Fig. 2.

Quando s'osserva l'indotta (fig. 2), il circuito secondario è costituito dai medesimi conduttori che dianzi formavano i due rami di derivazione fra A e B : e cioè dal campione x , e dal galvanometro G col filo indotto II e cogli accessori S . — Basta sostituire a questo fascio un conduttore y equivalente fino ad $1/10$, perchè la resistenza del circuito primario, mentre esercita l'induzione, sia uguale a meno di 0,0001 a quella che presentava all'atto della misura dell'inducente.

Un interruttore acconcio C_1, C_2 permette di mandare nel galvanometro, in rapida successione, una serie di correnti indotte

tutte di chiusura, ovvero tutte di apertura; cosicchè l'ago assuma la medesima posizione che aveva quando circolava nel galvanometro la derivazione della corrente inducente. Si conta il numero esatto delle interruzioni che devono effettuarsi al secondo per raggiungere questo intento: ed un tal numero, moltiplicato pel coefficiente d'induzione mutua dei due sistemi inducente e indotto, esprime senz'altro, in misura assoluta, la resistenza del campione sottoposto ad esame.

Invece dei due soliti rocchetti, io vagheggiava l'idea di adoperare un solenoide neutro, col quale fosse concatenato un certo numero di volte il circuito indotto; perchè l'espressione del potenziale mutuo sarebbe riuscita quanto mai semplice, e le lunghezze da misurare sarebbero state tre sole. Ma mi sono lasciato spaventare da chi riteneva insormontabili le difficoltà meccaniche per costruire un anello di sufficiente grandezza colla precisione voluta: ed ho avuto ricorso ad un grande cilindro, sul quale è avvolto uniformemente un unico strato di filo di rame sottile, e senza veruna rivestitura. Questo è il mio sistema inducente, del quale posso determinare le dimensioni con tutta l'esattezza desiderabile. Il sistema indotto è un rocchetto, che abbraccia il cilindro, e sul quale ho avvolto del filo di rame rivestito di seta, non mancando di prendere le più minute precauzioni; sebbene, nel caso mio, un errore commesso nella misura di questo sistema indotto abbia un'influenza affatto secondaria sul risultato finale.

Se il cilindro fosse di lunghezza infinita, il suo potenziale sul rocchetto che lo circonda sarebbe, come si sa:

$$M = \pi^2 D^2 n N,$$

ove D è il diametro del cilindro, n il numero delle spire che ne ricoprono l'unità di lunghezza, ed N il numero totale delle spire sul rocchetto indotto. — Pel caso della lunghezza finita, il potenziale è più complicato; ma l'ho ricavato espresso in funzioni sferiche dalle formole contenute nel trattato di Maxwell: e d'altro canto ne ho potuto ottenere facilmente l'espressione per integrali ellittici, mercè la squisita gentilezza colla quale il prof. Kirchhoff mi ha favorito un manoscritto, che faceva parte della sua Memoria sulla determinazione della costante di Neumann; ma che non è stato pubblicato insieme col resto negli

Ginevrina, confrontato dal prof. Pisati col metro campione di Roma. Ed a questo metro sono state riferite tutte le lunghezze.

A correzioni fatte, il diametro del solenoide, quale si deduce dalla lunghezza del filo di rame, è di 30^c,99334 ; mentre il diametro medio del marmo osservato direttamente col catetometro, era di 30^c,9588

La differenza . . 0^c,03454

coincide colla grossezza media del filo, la quale fu trovata, sotto il microscopio, di 0^c,0341 .

Quindi, assumendo pel diametro del solenoide il valore :

$$D = 30^c,9933 ,$$

l'errore sarebbe inferiore a $\frac{1}{3000000}$: ad ogni modo sempre trascurabilissimo, quantunque il diametro comparisca al quadrato nell'espressione del potenziale.

La lunghezza del solenoide, che comparisce nel denominatore di quell'espressione, non si è potuta finora misurare con un'esattezza maggiore di 10^{mm},1, ed è risultata di 116^c,700. Conto però, se non mi mancherà il tempo, di arrivare ad esprimerla con una cifra di più.

Il numero totale delle spire è 1871: e così:

$$n = \frac{1871}{116,7} .$$

Il rocchetto indotto è, come ho detto, di bronzo: e fu ottenuto nell'Officina Galileo dalla fusione di rame galvanico e di stagno Branca. È formato di due parti uguali, separate da uno strato di ebanite: ed è in tutto simile a quei rocchetti che hanno servito a Lord Rayleigh per ripetere la determinazione fatta dall'Associazione Britannica. È verniciato colla gommalacca, ed ha la sponda solcata da una fenditura foderata d'ebanite, per la quale passano i capi del filo. Finora vi sono avvolti due fili soli rivestiti di seta bianca, entrambi grossi 1^{mm}. Il più interno è coperto di seta una sola volta, ed è stato inzuppato con essenza di trementina satura di paraffina: vi forma sei strati alternativamente di 77 e di 78 giri, così che in tutto ha 465 spire. Il suo diametro medio fu dedotto, come pel solenoide inducente, sia

dalla lunghezza del filo, sia anche mediante il catetometro, ed è di 40^c.540, con un'esattezza esuberante, perchè entra nella formula come termine di correzione. L'altezza media di questo rocchetto, ossia la distanza media fra gli assi dei fili estremi, in uno strato, è di 8^c.383. Il secondo filo non è stato inzuppato di paraffina: ma è doppiamente coperto di seta bianca: occupa altri sei strati formando un secondo rocchetto di 432 spire, alto 8^c.428, col diametro medio di 41^c.759.

I quattro capi di questi due conduttori sono assicurati ad acconci serratili, talchè si possono adoperare o separatamente od in congiunzione.

All'atto dell'avvolgimento non si è mancato di esaminare se la resistenza si manteneva quale era richiesta da un buon isolamento.

Il cilindro riposa sopra un tripode di legno ed ottone, con robuste viti di livello per metterlo in posizione verticale. Il rocchetto indotto vi è infilato, e può venir fissato a varie altezze, allivellato ed orientato mercè acconcie viti a scrupolo. Tutto il sistema è racchiuso in una vetrina, nel costruire la quale si è evitato tutto ciò che potesse esercitare azione magnetica.

Il potenziale del cilindro sul primo rocchetto, posto a metà altezza, si è calcolato, nel modo dianzi indicato di:

$$669133 \times 10^9 \text{ C. G. S.}$$

Quello del cilindro medesimo sul secondo rocchetto, collocato come sopra, di:

$$619666 \times 10^9 \text{ C. G. S.}$$

E non credo che l'errore relativo di questi numeri superi gli 0,00008.

Dei cordoni a sette capi di filo di rame, con grosso involucro di guttaperca, congiungono i vari apparati, sono per ogni dove accoppiati e ritorti così che non esercitino azione elettrodinamica: e sono sospesi per mezzo di filo di guttaperca.

I commutatori sono tutti di rame e mercurio, sull'ebanite tirata a pulimento speculare: meno uno, che ha i pozzetti di porcellana ben lavata ed asciutta, ed appoggiata sulla paraffina.

essenziale si possono raccogliere le notizie di chiusura ed esclusione quella è aperta e ristretta.

La resistenza elettrica di questa apparenza si può dire proporzionale alla

In tutte le prove dei polimeri a martello, sottoposti poi da due forti martelli m_1, m_2 (fig. 1) di rame amalgamato (perchè il rame si riscalda spesso per effetto del attrito) servivano a mantenere costanti all'osservazione i due cilindri mentre i martelli picchiavano furiosamente sulle loro incudini.

Un idromotore Schmid a due cilindri fa ruotare, col mezzo d'una corda tenuta in tensione costante, l'albero degli eccentrici; sul quale, per avere un moto abbastanza regolare, ho dovuto applicare due volani del peso complessivo di 55^{kg} e del diametro di 84, non che una ruota a grandi ali.

Un freno adattato direttamente alla ruota dell'idromotore permette di graduare la velocità, la quale è accusata approssimativamente da un tachimetro di Schäffer e Budenberg.

M'ero prefisso di mantener costante la velocità coll'artificio usato da Lord Rayleigh, o mercè la ruota fonica di Poul La Cour, che possiedo; ma finora, preoccupato di continuo dalla ristrettezza del tempo, non vi sono riuscito. E tale malaugurata preoccupazione mi ha sempre fatto procedere per via di compensi e di espedienti, rendendo doppiamente faticoso ed incerto il mio lavoro.

Per determinare il numero delle correnti indotte, che dovevano passare al secondo nel galvanometro a fine di produrvi una data deviazione, mi sono valso finora d'un cronografo Hipp con tre elettrocalamite. Una è comandata da un interruttore apposito, applicato sull'asse degli eccentrici ed isolato da tutto il resto: la seconda funziona sotto l'azione diretta dell'orologio astronomico n.° 96, F. Gutkaes in Dresda, collocato nella specola del R. Istituto geografico militare, e comunicante col mio laboratorio per mezzo d'una linea telegrafica di 210^m: la terza elettrocalamita obbedisce ad un tasto prossimo al cannocchiale d'osservazione, e segna un punto quando la deviazione del galvanometro è quella desiderata.

L'intervallo corrispondente ad un secondo ha variato sulla zona dai 7 agli 8^c. Si misurano due tratti, di 10^s e di 20^s, che

comprendano nel mezzo il punto impresso dalla terza elettrocalamita: e si prende il valor medio delle due letture, che non presentano mai una differenza di $\frac{1}{1500}$. Talchè si può ritenere che l'errore di questa determinazione non arrivi, per ciascun numero, ai 0,0005: e viene poi notevolmente attenuato col ripetere le osservazioni e col prenderne le medie.

L'orologio ha un buon andamento, avanza di circa mezzo secondo al giorno sidereo; quindi per passare al tempo medio solare basta senz'altro accrescere il risultato finale di 0,00273. — Il lato debole è la maniera in cui vien chiusa la corrente, perchè il contatto si stabilisce fra un filino di platino portato dal pendolo, ed una gocciolina di mercurio.

In generale non sono ancora pienamente contento nè di questo modo di contare le correnti indotte, che è troppo lungo e tedioso: nè del motore Schmid, che non ha l'andamento regolare che vorrei; e, se sarà il caso d'insistere nelle presenti ricerche, migliorerò questi due punti. Ma ad ogni modo sono persuaso che, anche così come stanno ora gli apparati, sul mezzo millesimo ci si possa contare con piena fiducia.

Un'altra circostanza, per me ben dolorosa, ha reso incerte delle lunghe serie d'esperienze. La mia stanza da lavoro è spaziosa, a pian terreno, molto stabile, esposta a tramontana; ma è contigua col laboratorio di chimica: cosicchè ho la disgrazia d'aver per vicino il prof. Ugo Schiff. Il quale (pare incredibile) è andato portando qua e là dei lunghi pezzi di ferro, sebbene m'avesse promesso formalmente d'astenersene. — Ed ora che, con questa denuncia pubblica, ho inflitto allo Schiff la pena che merita, passo a dire succintamente come si fanno le osservazioni.

Ogni giorno, prima di principiare, si riamalgamano i martelletti dell'interruttore, si prova se i contatti sono perfetti, e mediante il cronografo si prende il tracciato delle aperture e delle chiusure operate dai martelletti dell'inducente e dell'indotto, per verificare se la posizione relativa degli eccentrici è la migliore.

Fatto ciò si dà all'interruttore, guardando il tachimetro, una velocità che poco si scosti dalla normale. Poi si mettono le morsette m_1, m_2 affinchè il circuito resti chiuso costantemente in ogni punto:

Si tenga presente la formula:

$$x = \frac{M}{1+ct} \frac{\alpha}{\beta} n ,$$

dove ω è la resistenza assoluta che avrebbe a 0° il campione, ct la correzione per la temperatura, M il coefficiente d'induzione mutua quale è dato dal calcolo, α la deviazione del galvanometro per effetto della derivazione dell'inducente, β quella, pochissimo diversa, determinata da n correnti indotte al secondo. E si vedrà che tendono a dare:

Un numero troppo piccolo:

1.° Il paramagnetismo del solenoide, per cui il coefficiente reale d'induzione sarebbe maggiore di M .

3.° La polarizzazione della pila, la quale sarebbe più intensa nella chiusura permanente che dà α , che non quando viene periodicamente aperta per ricavare β .

5.° Il calore svolto nel solenoide che tende ad indebolire la corrente primaria più quando vien misurata, che quando esercita l'induzione.

Un numero troppo grande:

2.° Le sostanze paramagnetiche comprese fra il solenoide ed il rocchetto secondario, perchè funzionerebbero come schermo, e però il coefficiente M sarebbe maggiore del vero.

4.° Il calore svolto dalla corrente nella derivazione della pila, nei casi che non si utilizza tutta la corrente: maggiore quando la corrente vien misurata, che quando esercita l'induzione; per cui α viene ad aumentare.

6.° Il calore Joule svolto nel campione senza che abbia agio di trasmettersi al termometro; perchè aumenta α e fa scemare β . E così pure il calore Peltier, che desta una corrente termoelettrica la quale si somma colla derivazione dell'inducente, e si sottrae dall'indotta.

7.° Lo smorzamento delle oscillazioni durante il moto ritardato, che allora tende a mantenere β più grande del dovere.

9.° Il magnetismo indotto negli aghi del galvanometro, se è il più debole che si trova fra le spire; perchè questo, deviando, verrà più rinforzato dell'altro: e più rinforzato dalle correnti d'induzione che dalla corrente costante.

11.° Il paramagnetismo della materia compresa fra le spire e l'ago del galvanometro, il quale, crescendo meno rapidamente della intensità della corrente, eserciterà la sua azione protettiva più per l'inducente che per l'indotta, rimpicciolendo α rispetto a β .

8.° Lo smorzamento delle oscillazioni allorchè il moto è accelerato.

10.° Il magnetismo indotto negli aghi del galvanometro, se quello compreso fra le spire comanda sull'altro.

12.° Il difetto d'isolamento, come bene osserva Lord Rayleigh.

La causa 1^a temo che non sia stata considerata abbastanza da' miei predecessori; talchè mi sorge il dubbio che i loro numeri possano essere, per ciò, alquanto al disotto del vero. Nel caso mio ho mostrato come non debba esercitare influenza sensibile. Così pure ritengo che sia della causa 2^a, non tanto perchè ho impiegato rame elettrolitico nella fusione del rocchetto, quanto perchè col circuito più esterno non ho ottenuto numeri maggiori che coll' interno, sebbene, come si sa, tutto il *filo* di rame contenga ferro. — Ma, per acquistare la piena certezza su questo punto, mi riservo a fare la riprova suggerita da F. Kohlrausch, determinando per mezzo di una bussola delle tangenti il potenziale magnetico del solenoide inducente e dei rocchetti indotti, e con-

frontandolo col potenziale calcolato. La mancanza di tempo me l'ha impedito finora.

Gli effetti 3° e 4° prodotti dalla polarizzazione della pila, o da un conduttore troppo sottile che la chiuda, ho avuto campo di constatarli: e me ne sono schermito in seguito.

Il calore svolto nel solenoide, come quello svolto nel campione (5° e 6°), non può esercitare influenza dannosa; perchè, avendo adoperato ordinariamente delle correnti di 0,01 d'ampère, esso è irrilevante: e sarebbe pure trascurabile nei pochi casi in cui ho spinto l'intensità della corrente fino ad 0,1 d'ampère.

Quando la velocità varia lentamente, non si riscontra nessuna differenza fra i risultati delle osservazioni fatte con velocità crescenti o decrescenti, cosicchè cessa qualunque preoccupazione relativa ai punti 7° ed 8°.

Non ho potuto nemmeno constatare differenza alcuna, sia orientando il galvanometro in modo che l'ago fosse parallelo alle spire col circuito aperto, sia che vi venisse condotto dalla corrente. Dunque nemmeno il magnetismo indotto negli aghi, contemplato ai numeri 9° e 10°, non produce errore nel mio caso.

Per verificare se lo smorzatore di rame od il filo stesso del galvanometro influiscano veramente (11°) in maniera sensibile, sto preparando un secondo galvanometro collo smorzatore ad aria. Ma, se questa causa d'errore può essere molto influente osservando le deviazioni impulsive, nel caso mio ha importanza di gran lunga minore: ed anzi ritengo che sia perfettamente trascurabile se penso all'estrema debolezza delle correnti che passavano pel mio galvanometro (da 0,0001 a 0,00001 d'ampère), per le quali il magnetismo indotto è probabilmente proporzionale alla loro intensità.

L'isolamento imperfetto, quale può derivare, per esempio, da un poco di polvere sull'ebanite ec., mi ha dato sempre numeri troppo grandi (12°): e non è mai esagerato lo scrupolo con cui si bada a questo particolare. Ciò non di meno non mi pare che gli si debba assegnare un'importanza esclusiva, preferendo senz'altro i numeri minori ai maggiori.

Ho fatto le esperienze prendendo via via pel ramo x (fig. 1) quattro diversi campioni di resistenza:

perchè gli altri sono andati impiegati a sistemare od a migliorare gli apparati. In questi 50 giorni ho eseguito non meno di 380 gruppi, da tre osservazioni ciascuno, e distribuiti in 74 serie, ricorrendo a diverse forze elettromotrici, ad intensità diverse di corrente, a velocità diverse dell'interruttore, adoperando come rocchetto indotto ora l'interno, ora l'esterno, ora entrambi riuniti insieme, ora valendomi dell'induzione alla chiusura, ora all'apertura.

Se, senza preoccuparmi del numero che danno, elimino quei gruppi i quali evidentemente sono stati influenzati da qualcuna delle cause perturbatrici sopra citate, e quelle serie che (per la instabilità del galvanometro, procuratami dal prof. Schiff) sono riuscite irregolari, rimangono pur sempre 197 gruppi appartenenti a 35 serie diverse; ai quali non saprei davvero attribuire pesi differenti.

Tutte le medie di queste 35 serie, spingendo pure la modestia molto più in là del dovere, prevedevo che concordassero fra loro almeno fino al mezzo millesimo: ed invece presentano delle differenze che salgono fino ai quattro millesimi! — Talchè ricaverai tanti valori distinti partendomi da Wild e arrivando fino ad H. Weber in Braunschweig, dopo essermi incontrato in Rowland, in Kohlrausch e, per una volta sola, anche in Lord Rayleigh, quand'egli lavorava con Schuster. E per quanto io abbia fatto e riflettuto, non m'è riuscito di trovarne la cagione. Numeri ottenuti in condizioni disparatissime coincidono spesso; numeri derivanti da condizioni, che mi parevano perfettamente identiche, presentano spesso le discrepanze maggiori.

È tale lo studio da me posto in questa quistione, che, se non temessi di peccare d'irriverenza, sarei tentato a pensare che anche gli altri sperimentatori si sarebbero forse imbattuti in dissaccordi analoghi, qualora avessero esagerato, come me, il numero delle loro osservazioni.

Fra tanta incertezza mi pare d'intravedere una cosa sola: ed è che i numeri esprimenti la resistenza assoluta d'un campione vadano via via diminuendo da un giorno all'altro, se nulla si cambia nel circuito secondario; e che riescano invece maggiori, allorchè entri a far parte di quel circuito un conduttore che non abbia servito in precedenza, oppure che da molti giorni sia

rimasto inoperoso. — Direi quasi che i fili di rame hanno bisogno d'abituarsi a condurre una successione rapida di correnti indotte. Ma, per quanto un tal fatto possa armonizzare con altri fatti già noti, sento la necessità, prima di darlo come certo, d'intraprendere una lunga serie d'esperienze opportunamente coordinate, e rivolte a questa mira.

Oggi, per finire la mia relazione preliminare, riferisco il valor medio ricavato dalle 591 osservazioni tenute per buone, come se le discrepanze (cosa inverosimile) fossero meramente fortuite.

Colle precedenti riserve, troverei:

$$1 \text{ B. A.} = 0,99024 \text{ Ohm}$$

oppure:

$$1 \text{ Unità Siemens} = 0,94432 \text{ Ohm}$$

ossia:

$$1 \text{ Ohm} = 1^{\text{m}},05896 \text{ di mercurio.}$$

Il così detto errore probabile di questo risultato finale sarebbe 0,000076; il quale, sommato coll'errore costante possibile 0,00008 (da cui è ancora affetto, come dissi, il coefficiente d'induzione mutua) diverrebbe:

$$\pm 0,00016 .$$

Firenze, 4 Aprile 1884.



RICERCHE SPERIMENTALI SUL FENOMENO DI *HALL*, PARTICOLARMENTE
NEL BISMUTO; MEMORIA DEL PROFESSOR AUGUSTO RIGHI.

I. *Storia della scoperta, e relazioni del nuovo fenomeno
con altri conosciuti.*

È noto che la forza che si esercita sopra un conduttore fisso percorso da correnti costanti, e situato in un campo magnetico costante, agisce sulla materia del conduttore, ma non tende a spostare la corrente nel seno di esso; onde è veramente quella, una forza *ponderomotrice*, ben diversa dalle forze *elettromotrici* che si esercitano sull'elettricità e non sulla materia ponderabile che la contiene. Ciò è esplicitamente dichiarato dal Maxwell in un notevole passo del suo trattato (1). Tuttavia in una teoria, per altro ingegnosa, sull'induzione unipolare, l'Edlund (2) ammette invece che una calamita accostata ad un conduttore percorso da correnti, agisca sopra ogni linea di corrente spostandola nel seno del conduttore, come agirebbe su d'un filo mobile percorso dalla corrente stessa.

Fu riflettendo su questi due pareri contraddittori, e cercando d'ottenere sperimentalmente una conferma del secondo, che il sig. Hall giunse a scoprire il nuovo ed interessante fenomeno che porta il suo nome.

A sua insaputa altri, e cioè Feilitzsch, Wiedemann, Mach (3) e Gore (4), avevano già tentato sperimentalmente di decidere la questione, ma nessuno di essi potè riuscire a trovare qualche azione del genere di quella ammessa da Edlund.

La prima esperienza di Hall (5) consistè nel collocare una spirale piana di filo metallico fra i poli di una elettrocalamita col suo piano perpendicolare all'asse magnetico, e nel vedere se la sua resistenza aumentava per azione del magnetismo. Se difatti la corrente che percorreva la spirale avesse dovuto obbedire

(1) V. II, p. 144.

(2) Ann. de Ch. et Ph. Janvier 1879.

(3) Wied. Galv., v. II, p. 174.

(4) Phil. Mag., v. XLVII, p. 393. 1874.

(5) Phil. Mag. March 1880, p. 225.

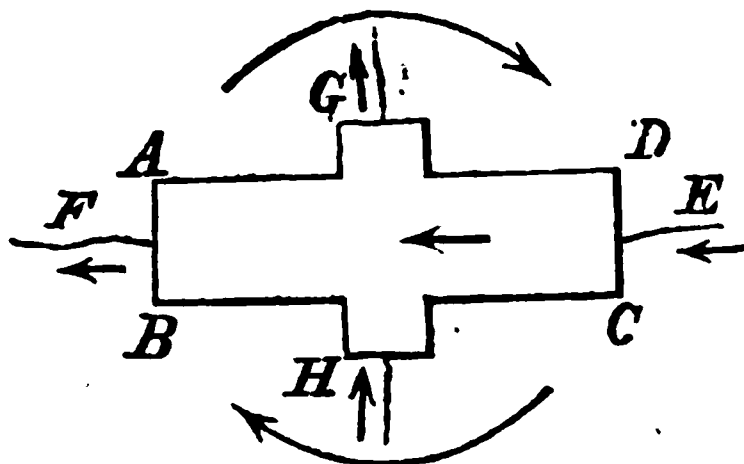
alla forza elettromagnetica, essa si sarebbe addensata da una parte del filo, come se quest' ultimo avesse d' un tratto diminuito di sezione. L' esperienza ebbe un risultato negativo.

Hall allora pensò, che forse si doveva considerare l' elettricità come un fluido incompressibile, e che invece di addensarsi realmente da un lato del conduttore, doveva solo tendere ad addensarsi, generando così una forza elettromotrice di nuovo genere, in direzione trasversale. Fece dunque una esperienza, che già era stata tentata da Rowland, la quale consisteva nel far passare la corrente in una lamina metallica collocata fra i poli d' una elettrocalamita, per mezzo di due elettrodi applicati in due punti qualunque, nel collocare due nuovi elettrodi, comunicanti con un galvanometro, in due punti d' una stessa linea equipotenziale, in modo cioè da non avere corrente, e finalmente nel vedere se una corrente permanente si manifestava eccitando l' elettrocalamita. Anche in tal caso il risultato fu negativo; ma avendo, per consiglio dello stesso Rowland, sostituito alla lamina una sottile foglia d' oro, ottenne in modo non dubbio una corrente.

Questa corrente era permanente, quindi non poteva attribuirsi a fenomeni d' induzione (che tuttavia si manifestavano naturalmente ad ogni chiusura od apertura della corrente nell' elettrocalamita). Essa si invertiva, sia invertendo la corrente nella foglia d' oro, sia invertendo la corrente magnetizzante che percorre l' elettrocalamita. Inoltre la sua intensità cresceva insieme all' intensità della corrente principale che percorreva la foglia d' oro, come pure insieme all' intensità della corrente che produceva il campo magnetico.

La forma più comoda, adottata da Hall, per la foglia d' oro

Fig. 1.



(che era applicata ad una lastra di vetro), fu quella di striscia rettangolare ABCD (fig. 1), alle estremità della quale erano applicati gli elettrodi E, F della corrente. La striscia aveva poi, circa a metà della sua lunghezza, due piccole appen-

dici rettangolari G, H, in modo che la foglia d' oro acquistava

la forma d'una croce. A quelle appendici si univano gli elettrodi del galvanometro. Per rendere nulla la corrente in questo strumento prima dell'azione dell'elettrocalamita, od almeno (ciò che più facilmente si ottiene) per ridurla ad un piccolissimo valore, trovò comodo di raschiare lateralmente dalla parte dovuta una od entrambe le due appendici. Infine, le comunicazioni della foglia erano fatte con lastre d'ottone fortemente premute da morsetti a vite.

La direzione della corrente che percorreva il galvanometro quando agiva l'elettrocalamita, era però tale, da essere in opposizione con quella che si poteva prevedere basandosi sulla legge di Ampère, e ritenendo che l'elettricità scorra dal polo positivo al negativo. Così, nel caso della figura 1, ove le frecce arcuate rappresentano la direzione della corrente magnetizzante, e le frecce orizzontali quella della corrente inviata nella foglia d'oro, la corrente nel galvanometro aveva la direzione indicata dalle frecce verticali. Si doveva quindi ammettere che l'elettricità nella corrente era un fluido che scorreva, non nella direzione che per convenzione si suole assegnare alla corrente, ma bensì nella direzione opposta, cioè dal polo negativo al positivo. L'esperimento interpretato in tal guisa, avrebbe dunque fornito un'importante ed inaspettata nozione sulla natura dell'elettricità.

Da alcune esperienze di misura si desunse poi, che la corrente trasversale era sensibilmente proporzionale all'intensità della corrente principale, ed all'intensità del campo magnetico.

Il Rowland (1) poco dopo fece notare, che la nuova forza elettromotrice, componendosi con quella della corrente principale, doveva dare una risultante inclinata sulla direzione della seconda; e siccome le due componenti sono fra loro proporzionali, l'angolo compreso fra la forza elettromotrice risultante e quella dovuta alla corrente principale (la sola che esista quando l'elettrocalamita non agisce), è dipendente solo dall'intensità del campo magnetico. La corrente sarebbe dunque girata d'un certo angolo, precisamente come lo sono le vibrazioni dell'etere in molti corpi trasparenti. Quest'osservazione, in connessione colla teoria di Maxwell, stabiliva dunque un'intima relazione fra il nuovo fenomeno, e quello della rotazione del piano di polarizzazione della luce.

(1) Phil. Mag. June 1880, p. 432.

Importava quindi verificare se un fenomeno simile a quello di Hall, si produceva nei dielettrici, e cioè se le linee di forza erano girate come le linee di corrente, per azione del magnetismo. Con un'esperienza la cui disposizione è facile ad indovinarsi, Hall (1) non ottenne però nessun effetto distinto.

Esso studiò in seguito, oltre che diverse foglie d'oro, anche l'argento, il ferro, il platino e qualche altro metallo. Il fenomeno si presentò nel platino e nell'argento nello stesso senso che nell'oro; ma col ferro la corrente trasversale ebbe sempre una direzione contraria a quella ottenuta con una foglia degli altri tre metalli. Questa particolarità offerta dal ferro, sembrava in relazione col suo potere magnetico. Ma il platino e poscia anche il nichel, quantunque magnetici, diedero il fenomeno nello stesso senso che l'oro e l'argento, che sono diamagnetici.

Senza fermarmi ad una nota di Boltzmann (2), confutata in parte da Hall (3), sulla possibilità di dedurre dal fenomeno di Hall una misura della velocità assoluta della corrente elettrica, nè ad altri lavori di minor importanza, devo indicare una nota rimarchevole di J. Hopkinson (4), in cui quest'autore per primo considera il fenomeno in discorso, da un punto di vista che sembra essere il vero. Esso fa osservare cioè che il fenomeno di Hall è implicitamente compreso nelle equazioni generali che contengono le componenti della forza elettromotrice e quelle della corrente in un punto d'un conduttore a tre dimensioni, quali furono date da Thomson e da Maxwell. Infatti, in virtù della legge di Ohm, le componenti X, Y, Z , della forza elettromotrice in un dato punto, devono essere funzioni lineari delle componenti u, v, w , della corrente, e quindi:

$$X = R_1 u + Q_3 v + P_2 w$$

$$Y = P_3 u + R_2 v + Q_1 w$$

$$Z = Q_2 u + P_1 v + R_3 w \quad (5).$$

In generale può ritenersi $P_1 = Q_1, P_2 = Q_2, P_3 = Q_3$, se un solido percorso dalla corrente può assimilarsi ad un assieme di conduttori lineari. Ma se per una cagione qualunque, per esempio

(1) Phil. Mag. November 1880.

(2) Phil. Mag. Avril. 1880, p. 308.

(3) Phil. Mag. August 1880, p. 136.

(4) Phil. Mag. December 1880, p. 430.

(5) MAXWELL — A treatise on Electricity and Magnetism, v. I, p. 345, 349.

sandosi forse in modo speciale sulle proprietà dei metalli magnetici. Difatti, mentre il ferro ed il cobalto (studiato pure da Hall) ⁽¹⁾ danno il fenomeno in senso inverso all'oro, il nichel, che pure è magnetico, lo dà, come si è detto, nello stesso senso dell'oro. Tentò inutilmente di verificare il fenomeno della rotazione del piano di polarizzazione, con un velo trasparente di nichel, ma poté riconoscere che il fenomeno di Kerr (rotazione del piano di polarizzazione per riflessione sul polo di un corpo magnetizzato) si compie col nichel nello stesso senso che col ferro.

Ma si noti che quantunque entrambi magnetici, fra il ferro ed il nichel esistono però altri caratteri distintivi, ed anzi uno fu riscontrato da Thomson ⁽²⁾. Il momento magnetico di un filo di ferro posto nell'asse di un'elica magnetizzante, cresce stirandolo e cala diminuendo la tensione, se l'intensità della corrente magnetizzante è inferiore ad un dato limite; al di là invece succede l'opposto. Or bene, il nichel nelle stesse condizioni si comporta all'inverso, e cioè è per le correnti deboli che il magnetismo diminuisce aumentando i pesi tensori, e che cresce diminuendoli.

Era quindi a prevedersi che il nichel si comportasse all'opposto del ferro e del cobalto, in quanto alle variazioni di dimensione che la magnetizzazione produce in questi metalli. E difatti mentre un'asta di ferro si allunga, quando passa la corrente in un rocchetto del quale occupa l'asse ⁽³⁾, ed il cobalto presenta il medesimo fenomeno, come ha recentemente dimostrato Barrett ⁽⁴⁾, il nichel, secondo questo sperimentatore, diminuisce invece di lunghezza, posto che sia nelle stesse condizioni. Ed è da credere che quest'ultimo metallo si allunghi quando è percorso longitudinalmente da una corrente, mentre il ferro invece si accorcia, come ho dimostrato io stesso ⁽⁵⁾. Parmi che tutto ciò mostri una volta di più, che la causa del fenomeno di Hall risiede

(1) Phil. Mag. September 1881, p. 157.

(2) On the electrodynamic qualities of metals. Phil. Trans. 1879, p. 55.

(3) Mem. dell' Acc. di Bologna. Ser. IV, Tom. I, pag. 99. — N. Cimento, Marzo 1880, pag. 97.

(4) La lumière électrique, 1883, pag. 218.

(5) L. c.

II. *Ripetizione dell'esperienza di Hall.*

Per addestrarmi nella ricerca che avevo in vista, cominciai col ripetere l'esperienza di Hall, facendo uso d'una foglia d'oro in forma di croce. Ottenni tosto il fenomeno, ma nella mia disposizione sperimentale ricorobbi due inconvenienti, cioè la difficoltà di ridurre la foglia tale da non aversi quasi corrente al galvanometro quando l'elettrocalamita non agiva, e l'instabilità dei contatti.

Quanto alla prima, giunsi facilmente a vincerla dopo avere acquistato un poco di pratica, seguendo il metodo di Hall, cioè raschiando le parti laterali dei rami minori della croce, che servono alle comunicazioni col galvanometro. Chi avesse a ripetere l'esperienza dovrebbe tenere in mente, che l'effetto che si ottiene colla raschiatura è più o meno notevole, secondo che essa si compie più o meno vicino ai rami principali della croce.

I contatti li feci dapprima in modo simile a quello insegnato da Hall, cioè con lamine d'ottone premute sull'oro direttamente con morsetti. Ma per quanto li stringessi, l'indicazione del galvanometro variava a sbalzi ad ogni menoma scossa data alla lastra, e spesso anche pel fatto solo dell'inviare corrente nella elettrocalamita. Oltre a ciò, evitando anche le scosse, lo specchio del galvanometro oscillava sempre ed irregolarmente. Dopo varie prove mi fermai alla disposizione seguente. Si incollano delle strisce di foglia di stagno, con soluzione assai diluita di gomma, alle quattro estremità della croce d'oro, in modo che in parte riposino sull'oro ed in parte sul vetro nudo. Quando la gomma è ben secca, si stringono coi morsetti le lastrine d'ottone, non sull'oro, ma sullo stagno (1). In tal modo i contatti sono abbastanza stabili, e si ha il vantaggio, facendo le strisce di stagno alquanto lunghe, che la corrente nel galvanometro non dipende

(1) Lo strato coibente di gomma solida sembrerebbe costituire un ostacolo alle comunicazioni, ma praticamente ciò non accade. Forse lo strato di gomma disseccata non è continuo, e mentre in certi punti restano dei contatti diretti fra stagno ed oro, in altri punti la gomma solidificata mantiene la stabilità del sistema, ed impedisce che i contatti stessi possano subire modificazioni.

AB od AC nel caso della figura 3 è spinta verso l'alto, e nel caso della figura 4, verso il basso.

Supponiamo adesso invece che la corrente percorra la foglia d'oro in senso inverso alla biforcazione, cioè entri da B e C ed esca da A. Se la corrente magnetizzante è diretta come indicano le frecce curve della figura 5, l'esperienza indica che cresce ancora la corrente in C relativamente alla corrente in B, precisamente come quando la corrente della foglia d'oro era diretta in senso contrario (1). Similmente quando (Fig. 6) la corrente ma-

fig. 3

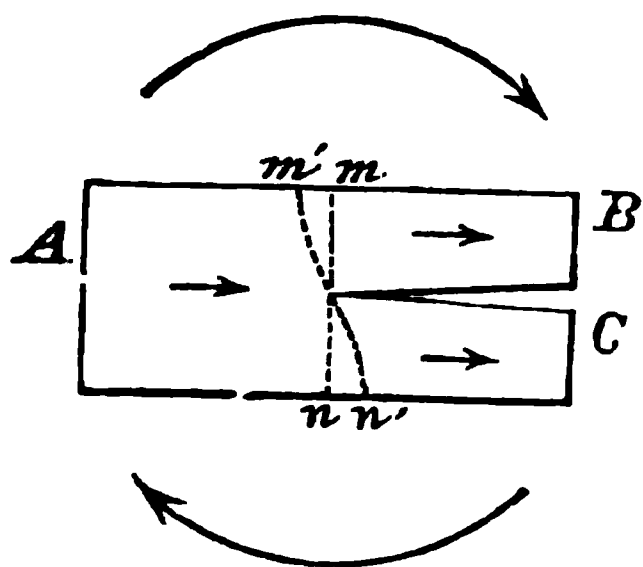


fig. 4

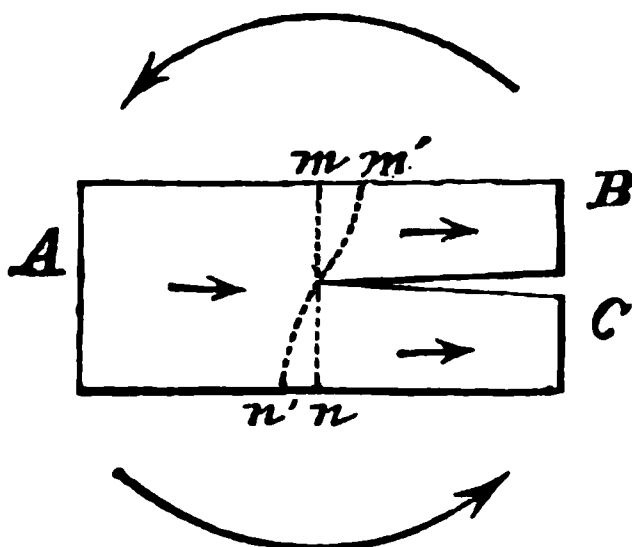


fig. 5

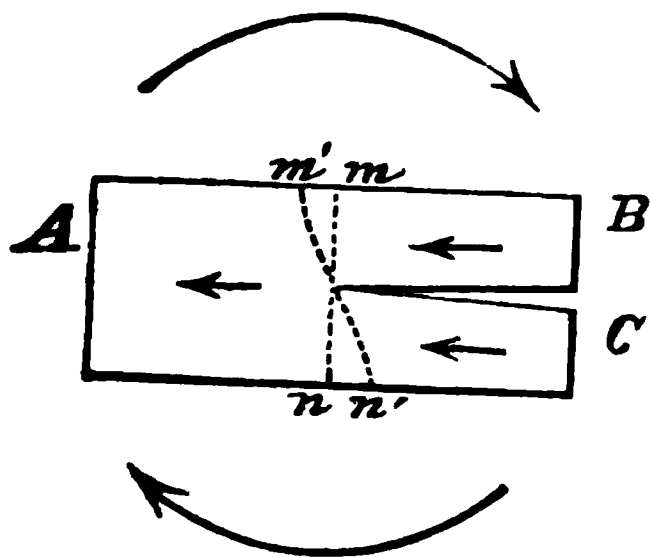
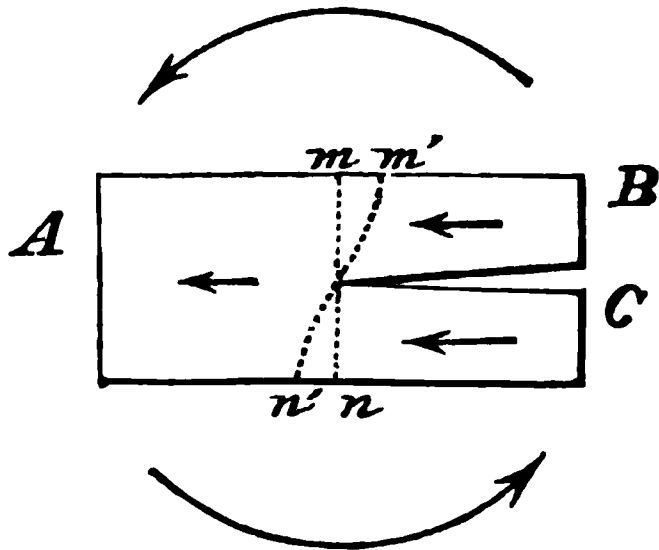


fig. 6



gnetizzante va in senso contrario, la corrente cresce in B relativamente a C. Dunque avendo invertito la corrente nella foglia d'oro, la tendenza ipotetica allo spostamento di essa nel seno del metallo non cambierebbe direzione. Prima un tale spostamento avrebbe dovuto essere in senso opposto alle ordinarie azioni elet-

(1) Evidentemente, quantunque in questo caso, come in quello della figura 3, sia la corrente C che prevale sulla B, pure ora la deviazione del galvanometro si fa in senso opposto. E la ragione si è che le correnti nei rocchetti del galvanometro hanno nel caso della figura 5, direzioni opposte che nel caso della figura 3.

Hall nel bismuto e nell'oro, ecco il risultato di due esperienze comparative.

Con una lamina di bismuto grossa $0^{\text{mm}},08$ (misurata allo sferometro), la cui forma era press' a poco quella della Fig. 2, la differenza fra le posizioni di fermata della scala corrispondenti al passaggio della corrente nell'elettrocalamita nelle due direzioni opposte, fu in media $133^{\text{mm}},5$.

Con una foglia d'oro di forma e dimensioni incirca eguali, e con eguali intensità delle correnti, ma grossa solo $0^{\text{mm}},000087$ ottenni invece $10^{\text{mm}},2$. Dunque benchè circa 920 volte più grosso, il bismuto diede un effetto 7 volte maggiore di quello dato dall'oro. D'altronde il fenomeno di Hall si produceva coi due metalli nel medesimo senso.

Risulterebbe dai numeri precedenti che il coefficiente rotatorio del bismuto sarebbe circa 6400 volte quello dell'oro, e quindi nella lista riferita nel cap. I dovrebbe notarsi il bismuto con un coefficiente rotatorio di circa -43520 . Questo numero però non è da adottarsi definitivamente, giacchè risulta da un'esperienza scelta a caso fra molte altre, eseguite tanto col metodo del capitolo precedente quanto con quello di Hall, dalle quali si dedurrebbero pel coefficiente suddetto valori alquanto differenti fra loro e da quello riportato, forse in causa di diversità di struttura cristallina fra le varie lastre.

Con una laminetta di bismuto grossa circa $0^{\text{mm}},011$ ottenni deviazioni di 8^{mm} o 10^{mm} , semplicemente accostandovi ora l'uno ora l'altro polo d'una sbarretta d'acciaio magnetizzata. Pensai quindi che sarebbe interessante riuscire alla costruzione di lamine di bismuto alquanto più sottili, e mi applicai tosto a studiare i mezzi atti ad ottenerle.

V. Costruzione di lamine sottilissime di bismuto.

Senza narrare la lunga serie di tentativi infruttuosi nei quali spesi un tempo lunghissimo, descriverò brevemente i due metodi pratici coi quali sono riuscito ad ottenere delle laminette il cui spessore può scendere fino a circa $0^{\text{mm}},0006$. Nessuno dei dettagli che indicherò è superfluo per chi voglia prepararsi queste lamine.

TABELLA I.

Bottiglie 6 : Cariche 18.

Numero d'ordine	I SERIE		II SERIE	
	Lunghezza della congiuntiva	Calore totale	Lunghezza della congiuntiva	Calore totale
	mm		mm	
1	0,0 ⁽¹⁾	31,9	0,0 ⁽²⁾	24,4
2	0,25 circa	31,9	0,25 circa	29,9
3	1,4 »	28,8	1,4 »	26,9
4	3,4	30,6	1,9 »	26,5
5	6,4	30,9	3,4	27,3
6	10,4	32,4	6,4	26,4
7	15,4	31,8	11,4	29,7
8	20,4	33,2	21,4	33,5
9	25,4	31,4	31,4	38,1
10	30,4	35,8	36,4	38,1
11	35,4	37,9	41,4	34,7
12	40,4	36,5	44,4	35,8
13	42,4	36,1		
14	44,4 ⁽³⁾	35,8		

I risultati della precedente tabella sono distinti in due serie: quelli della I s'ottennero accrescendo la lunghezza della congiuntiva da 0 a 44^{mm},4, e quelli della II decrescendola di nuovo fino a 0: e ciò feci perchè durante l'esperienza la colonna termometrica, che serve da indice, spesso varia alquanto di lunghezza, ed i termometri modificano perciò la loro sensibilità: nel qual caso le due serie di misure valgono a compensare sufficientemente gli errori provenienti dalla modificata squisitezza dell'apparecchio.

Da ambedue le serie di esperienze, facendo astrazione dal caso delle congiuntive zero, si scorge che il calore somma svolto delle due scintille è, con grande approssimazione, costante; talmente che mentre la congiuntiva variò di lunghezza da 0^{mm},25 circa, a 44^{mm},4, cioè nel rapporto di 1 a 178 circa, il calore variò approssimativamente da 1 ad 1,12 nella I serie, e da 1 a 1,2 nella II.

(1) Il termometro congiuntivo fu escluso dal circuito, ma il suo vano interno comunicava con quello del termometro eccitatore.

(2) La scarica passava di rado.

(3) Non vi era scintilla.

successivamente e senza interruzione. Nella I accorciai la scintilla congiuntiva, di mano in mano, da 42^{mm} a 0,5; e nella II, con le medesime norme, l'accrebbe di nuovo fino a 42^{mm}. L'indice nel principio delle esperienze era di 112^{mm} di lunghezza, ed in fine si ridusse a 100. Le misure furono ripetute 5 volte per ciascuna lunghezza di scintilla, e le medie di esse sono riportate nella seguente tabella:

TABELLA III.

Bottiglie 8: Cariche 24.

Lunghezza congiuntiva L	CALORE PER CONGIUNTIVA		M E D I E $\frac{C+C_1}{2}$	DIFFERENZE da 85,14
	Decrescente C	Crescente C ₁		
42 ^{mm}	33,84	32,55	33,19	—1,95
40	33,57	33,56	33,56	—1,58
35	33,92	34,74	34,34	—0,80
30	32,66	33,66	33,16	—1,95
20	36,74	33,69	35,35	±0,00
10	34,84	38,94	36,39	+1,25
5	36,30	36,94	36,62	+1,48
2	36,18	36,06	36,12	+0,98
1	37,24	37,34	37,29	+2,15
0,5	35,98 (1)	35,98	35,39	+0,25
			media 35,14	

Questi risultati mostrano, diversamente da quanto s'era trovato più sopra, che il calore fu forse alquanto superiore per le piccole che per le lunghe scintille congiuntive; pure la differenza è certo assai piccola e tale da attribuirsi ad errori di esperienze: tuttavia volli ripetere le misure precedenti e ne eseguii, come di consueto due serie: nella I portai successivamente la lunghezza della congiuntiva da 1^{mm} a 42, e nella II riportai la congiuntiva nuovamente a 42^{mm}; ed i risultati medii di 5 misure per ciascuna lunghezza di scintilla sono qui di seguito trascritti:

(1) Media di 10 misure.

Bottiglie 8: Cariche 24.

Lunghezza coniuntiva L	CALORE PER CONGIUNTIVA'		M E D I E $\frac{C+C_1}{2}$	DIFFERENZE da 81,79
	Crescente C	Decrescente C ₁		
1	28,58	30,76	29,67	—2,12
2	29,46	33,70	31,58	—0,21
5	30,80	30,93	30,87	—0,92
10	32,22	31,88	32,05	+0,26
20	37,42	33,64	35,53	+3,74
30	33,70	29,40	31,55	—0,24
40	31,30	31,40	31,35	—0,44
42	31,71 (1)		31,71	—0,08
			media 31,79	

I risultati precedenti, oltremodo concordi, mostrano con le loro medie finali, che realmente il calore totale svolto dalle due scintille è costante; (2) onde può ritenersi che la causa perturbatrice ricordata era, con ogni probabilità quella che alterava i fenomeni studiati. Aggiungerò altresì che tanto queste ultime ricerche, quanto quelle della Tabella III furono eseguite in identiche condizioni, onde i risultati di entrambe poterono adoperarsi per calcolare le medie comuni, le quali ho riportate nel quadro seguente, che è come più generale e perciò meglio conferma la legge del fenomeno qui studiato.

(1) Media di 10 misure.

(2) L'indice in principio di tali esperienze era di 185 e si ridusse in fine a 180^{mm}.
costa rimase quasi costante: il che il coadiuvò certo ad ottenere risultati concordi.

TABELLA V.

Lunghezza coniuntiva	MEDIE GENERALI del Calore	DIFFERENZE da
L	C	33,52
1	33,45	—0,07
2	33,85	+0,33
5	33,75	+0,23
10	34,44	+0,92
20	35,44	+1,92
30	32,35	—1,15
40	32,45	+0,82
42	32,45	—1,07
	<hr/> media 33,52	

I numeri di queste tabelle ci mostrano evidentemente che il calore totale svolto dalle due scintille è costante; però se più minutamente si osserva questa tabella, e meglio ancora la precedente, noi scorgiamo esservi come un leggiero massimo di calore a metà delle serie, del quale dirò più appresso.

Dopo tutte queste esperienze concordi, volli ancora confermare la legge precedente in un'altra maniera. Adoperai lo stesso apparecchio della Fig. 1, (') col quale sperimentavo al modo consueto, limitandomi però a misurare il calorico totale delle due scintille, facendo la congiuntiva una prima volta di 40^{mm} ed una seconda di 1^{mm}; poscia ripetei le stesse esperienze con la congiuntiva prima di 40^{mm} e poi di 1^{mm}; e così alternamente per più volte di seguito. Per ciascuna di tali lunghezze le misure furono ripetute 6 volte; e qui di seguito sono registrate le medie di codeste nuove misure:

(1) In queste misure furono adoperati i grandi palloni.

TABELLA VI.

Bottiglie 8 : Cariche 26.

CALORE TOTALE PER CONGIUNTIVA	
L = 40 ^{mm}	L = 1 ^{mm}
C	C ₁
34,70	35,64
38,16	36,78
38,38	37,02
41,10	38,25
40,96	39,89
40,20	39,93
40,00	37,45
39,39	40,08
40,57	38,28
41,20	40,07
media 39,47	media 38,34

L'indice in principio era di 90 mill., in fine di 75 mill.

Questi numeri, molto concordi, mostrano l'indipendenza assoluta del calore dalla lunghezza della congiuntiva: il che meglio si rileva dalle medie finali ricavate ciascuna da ben 60 misure, tutte fra loro assai concordi.

Finalmente aggiungerò che siccome le piccole congiuntive (di frazione di millimetro) producono, come dirò fra poco, delle lievi perturbazioni nella quantità del calorico somma generato da due scintille, così temendo che codesta perturbazione s'estendesse anche alla scintilla di 1^{mm}, volli ripetere altre esperienze identiche alle precedenti, ma con scintille congiuntive ora di 2^{mm} ed ora di 40^{mm}; e qui di seguito sono le medie di 5 misure per ciascun caso;

Il calore somma svolto da due scintille congiuntive, di lunghezza somma costante, è costante, comunque variano le loro rispettive lunghezze, supposta costante la scarica che le produce.

La legge precedente, relativa alle due congiuntive, ci induce ad ammettere che il calore svolto dalle congiuntive è proporzionale alla loro lunghezza, come già dissi altra volta ⁽¹⁾: e quindi può ritenersi come probabile, che la temperatura della scintilla sia indipendente dalla sua lunghezza, supposte costanti tutte le altre circostanze.

E siccome la medesima legge si verifica pel calore prodotto da una congiuntiva e da una eccitatrice insieme, così noi siamo indotti a credere che la somma delle loro lunghezze deve essere costante, nei limiti delle precedenti esperienze; il che ho in altra occasione dimostrato con misure dirette ⁽²⁾. E per conseguenza anche nella eccitatrice la temperatura deve essere indipendente dalla sua lunghezza, sempre nei limiti delle mie esperienze, ed astrazion fatta dalle ricordate lievi variazioni.



Tali adunque sono i fenomeni generali relativi al calore prodotto da due scintille di qualsiasi natura; però un esame più minuto di alcuni dei risultati trascritti in questa memoria, e di altri che per brevità non ho riportati, mostrano come la legge generale da me esposta precedentemente, circa il calore somma della scintilla congiuntiva ed eccitatrice, presenta alcune lievi anomalie, delle quali andremo ora ad occuparci, non avendone tenuto discorso fin qui per ragione di semplicità.

(*Continua*)

in media 40,88: ed invece fu un po' minore, cioè 38,80 quando la scintilla fu di 39 mill. nel V ed 1 mill. nel IV: questa piccola differenza, che evidentemente non influisce sulla media finale, è dovuta a cagione che discuterò in seguito.

(1) *Atti dell' Acc. di Scienze di Bologna*, serie III, tomo IX, 1879.

(2) *Sulla lunghezza somma di una o più scintille ec.* — *R. Acc. dei Lincei*, serie III, vol. VIII, Roma 1882.

	A. B. C.	A'. B'. C'
		
Lunghezza delle branche mm.	70 —	100
Larghezza	» 11,5	12
Grossezza	» 4	8
Distanza fra loro	» 21	19

Nella loro lavorazione si curò che l'acciaio non si arroventasse di troppo e furono temprate al rosso arancio. Si magnetizzarono a media forza le A. B. C. con magazzino magnetico, e più leggermente le A'. B'. C'. Si abbandonarono quindi a se stesse e disarmate per tre giorni, leggermente scuotendole di quando in quando (1). Le rispettive àncore erano pure a ferro di cavallo e di ferro dolcissimo, e quando non erano perfettamente neutre le si riducevano tali col lasciarle cadere parecchie volte al suolo. Tranne dall' avere le gambe metà lunghe di quelle delle rispettive magneti erano ad esse uguali rispetto alle altre dimensioni. Ecco i risultati ottenuti con queste sei calamite. Per brevità indicheremo le correnti totale, polare, di strappo coi simboli Ct. Cp. Cs.

Calamite.

	A.	B.	C.		A'.	B'.	C'.
Ct.	100	84	100	Ct.	75	66	60
Cp.	38	30	40	Cp.	30	27	27.

Armate colle rispettive àncore, e strappando queste subito dopo:

	A.	B.	C.		A'.	B'.	C'.
Cs.	70	50	56	Cs.	54	54	36
Ct.	100	90	100	Ct.	75	60	60
Cp.	38	30	40	Cp.	30	30	27.

(1) In tal modo una calamita raggiunge uno stato magnetico assai prossimo al permanente (Lamont et Hansteen loc. cit. e Gordon id.).

Armate di nuovo e distaccate le àncore come sopra:

	A.	B.	C.		A'.	B'.	C'.
Cs.	?	32	58	Cs.	60	49	33
Ct.	100	90	104	Ct.	75	66	54
Cp.	34	30	38	Cp.	33	30	27.

Id. Id. Id. e strappando dopo tre giorni:

	A.	B.	C.		A'.	B'.	C'.
Cs.	60	50	54	Cs.	60	51	36
Ct.	100	80	100	Ct.	90	69	40
Cp.	30	28	40	Cp.	30	30	30

Si magnetizzarono le A. B. C. fortemente con elettrocalamita nel verso di prima, si accrebbe la forza delle A'. B' C', pure nel senso primitivo, ma usando ancora il magazzino magnetico; indi tutte e sei furono tenute disarmate per tre giorni e leggermente scosse. Si allontanarono un tal poco i rocchetti dal galvanometro (¹).

Provate diedero:

	A.	B.	C.		A'.	B'.	C'.
Ct.	105	90	90	Ct.	103	75	75
Cp.	33	30	30	Cp.	30	27	30

Armate e strappando tosto:

	A.	B.	C.		A'.	B'.	C'.
Cs.	69	60	39	Cs.	60	45	60
Ct.	105	90	90	Ct.	103	75	75
Cp.	33	30	30	Cp.	33	27	30

(1) Diciamo una volta tanto che la distanza fra i rocchetti del galvanometro si variava secondo la grandezza e la forza della calamita e che durante il tempo in cui era tenuta senz' àncora, dopo di averle dato il necessario magnetismo, veniva di quando in quando leggermente scossa e tenuta sempre in una data posizione.

Id. Id. dopo tre giorni:

	A.	B.	C.		A'.	B.'	C'.
Cs.	63	60	?	Cs	?	45	57
Ct.	90	90	90	Ct.	105	75	75
Cp.	33	30	30	Cp.	33	27	30

Id. Id. dopo tre giorni le A. B. C.

	A.	B.	C.
Cs.	63	57	45
Ct.	90	90	90
Cp.	36	30	36

Le A'. B'. C' vennero calamitate a saturazione con elettrocalamita nel verso di prima:

	A'.	B'.	C'.
Ct.	120	97	90
Cp.	48	30	27

Armate e strappando subito.	{	Cs.	90	75	75
		Ct.	120	98	90
		Cp.	48	30	27

Id. Id. dopo tre giorni.	{	Cs.	88	75	78
		Ct.	120	93	90
		Cp.	45	30	27

Risulterebbe da queste prove che armando una calamita per la prima volta dopo la sua costruzione e strappando di subito l' àncora, non si modifica sensibilmente la quantità del suo magnetismo permanente totale, nè quello delle sue diverse parti, (quelle coperte dai rocchetti e le rimanenti scoperte e più lunghe). Non si verificherebbero che differenze leggerissime, ora in più ora in meno, e talora nessuna, fra il magnetismo che scom-

pare dalle estremità polari coperte dai rocchettini all'atto del primo strappo dell' àncora, e quello che svanisce strappando dopo parecchi giorni dal contatto. Lo stesso del permanente. E tutto ciò per valori variabili nel magnetismo iniziale permanente delle magneti.

Prove analoghe si fecero con due altre calamite A", B" uguali in tutto, tranne che nella forza, alle A. B. C. ora impiegate.

		A"	B"
Magnetizzate debolmente indi provate dopo 2 giorni.	Ct.	45	36
	Cp.	15	13
<hr/>			
		A"	B"
Armata e strappando subito.	Cs.	30	34
	Ct.	45	37
	Cp.	15	15
<hr/>			
Id. Id. dopo tre giorni.	Cs.	30	36
	Ct.	45	39
	Cp.	15	15
<hr/>			
Rinforzate nel verso di prima e provate dopo tre giorni.	Ct.	150	114
	Cp.	36	30
<hr/>			
Armata e distaccata l' ancora	Cs.	90	90
	Ct.	150	114
	Cp.	36	30
<hr/>			
Id. Id. dopo 5 giorni	Cs.	90	90
	Ct.	150	120
	Cp.	33	30

Risultati poco diversi dai precenti.

Le stesse calamite A". B" vennero smagnetizzate coll' arroventamento, di nuovo temprate, magnetizzate a media forza e lasciate disarmate per cinque giorni. Per esse si misurò anche

come un risonatore avvicinato all' orecchio, e rinforza i suoni corrispondenti a quella vocale. Invece di un piano si può adoprare un monocordo ec.

Se, muniti al solito del palloncino, si danno alla bocca alternativamente le configurazioni relative alle vocali *a*, *o*, *e*, mentre un'altra persona vicina canta una vocale, per es. l' *a*, si sentono successivamente le vocali *a*, *o*, *e*.

Per variare il timbro di un suono si può anche usare convenientemente il tubo di Quincke.

P. VOLKMANN. *Osservazioni alla 2ª memoria del sig. Bohn « sulle misure assolute »*. — L' A. avverte che egli non ha mai negato la necessità che le leggi naturali debban condurre ad equazioni omogenee; ma bensì non ritiene esser necessario che tali equazioni debbano essere omogenee anche prima d'introdurvi i valori costanti, che derivano dalle dimensioni delle quantità in esse considerate.

Constata una contraddizione fra l' affermazione del Bohn che le dimensioni di una quantità non abbiano nulla a che fare col concetto di essa, e il volere infirmare la validità del sistema elettromagnetico adducendo che questo considera la resistenza come una velocità. L' A. osserva che, anche secondo il Kirchhoff, la resistenza elettrica è da considerarsi quale una quantità numerica. Se si volesse, p. es., definire la resistenza di un filo col ritardo che produce in una scarica, si avrebbero due valori diversi a seconda che il filo fosse steso in linea retta, o avvolto a spirale, e ciò per le estracorrenti indotte nel filo. Avverte poi che in alcuni casi le dimensioni di una stessa quantità possono esser diverse, a seconda dei concetti che si possono usare per determinarla.

P. VOLKMANN. *Sulle dimensioni della massa magnetica in misura elettrostatica assoluta*. — Esposti i diversi principi che conducono a stabilire le dimensioni delle varie grandezze elettriche, l' A. mostra che la controversia insorta fra Helmholtz e Clausius, si riduce a questo: che Helmholtz, e con esso il Maxwell, ritengono necessarie due leggi naturali a stabilire un sistema qualunque di unità elettriche, mentre il Clausius ritiene che a tale scopo basti la sola relazione $[m] = [iL]$ tratta dalla legge di Ampère. Del resto l' A. osserva che l' importanza delle di-

ser funzione della pressione, lo è del tempo. Non si può supporre che si tratti di azioni chimiche, perchè alle temperature delle esperienze, l'anidride carbonica che non può spostar l'acqua dall'idrossido di potassio, non potrebbe certo alterare il vetro. Basta dunque la sola ipotesi che il gas si accumuli sulla superficie del vetro e che, per spiegare la diminuzione osservata nel volume, vi si riduca liquida. — La durata del fenomeno si spiega soltanto ammettendo che il vetro si lasci compenetrare dal gas, le cui molecole essendo premute fra gli interstizi molecolari del vetro, devon superare una resistenza che cresce col tempo. — Soltanto esperienze continuate per molto tempo, potranno decidere se la condensazione avrà o no un limite.

E. J. MILLS. *Sul punto di fusione e di ebollizione in rapporto alla composizione chimica.* — Se la materia non è che un modo di movimento, differente dall'energia soltanto pel suo carattere più concreto, il calore, poichè produce effetti simili a quelli dovuti alla presenza di una sostanza concreta, potrà considerarsi quale un reagente chimico. Ora la legge più generale che governa le reazioni chimiche, è che l'effetto risultante è proporzionale direttamente al prodotto delle masse attive x, y e inversamente alla somma dei loro residui x_r, y_r . Applicando perciò del calore ai termini costituenti le serie di formula generale $pX \cdot xCH_2$, considerate in questa memoria, l'effetto e risultante sarà misurato dai punti di fusione o di ebollizione; e se t è il numero dei gradi centigradi che corrispondono a CH_2 , se β e c sono costanti si avrà

$$e = \frac{\beta t(x-c)}{(x_r-c)+t_r}$$

Ma $x_r = x$, e prossimamente $t_r = t$, onde ponendo $1:t = \gamma$ avremo

$$e = \frac{\beta(x-c)}{1+\gamma(x-c)}$$

Mediante questa formula, di cui determina le costanti con opportune esperienze, l'A. calcola i punti di fusione per le paraffine C_xH_{2x+2} , per i chetoni e i chetati, e trova che concordano moltissimo con quelli misurati direttamente. Secondo quanto aveva accennato Bayer, le costanti nella formula precedente sono

muove. — L'apparecchio si gradua facilmente, ed è di uso assai comodo, non essendo turbato da urti anche violenti.

106. — S. BIDWELL. *Alcune esperienze illustrative di una spiegazione del fenomeno di Hall.* — L'A. descrive alcune esperienze da esso eseguite, e dalle quali risulta che il fenomeno di Hall si produce anche esercitando sulle foglie metalliche, disposte nel solito modo, delle azioni meccaniche. — Da ciò è condotto a ritenere che nel fenomeno stesso il magnete abbia un'azione puramente meccanica, e non quella di deviare la corrente. Rammenta le correnti termoelettriche scoperte dal Thomson nel riscaldare il punto di contatto fra due pezzi di filo di rame, uno stirato e l'altro no, e osserva che le azioni meccaniche esercitate sulle foglie metalliche dal magnete, interpretate col concetto del Thomson, son precisamente tali da dar luogo a correnti quali si manifestano nel fenomeno di Hall, eccetto che per l'alluminio; ma la differenza potrebbe esser dovuta alla diversa qualità del metallo adoperato dai due sperimentatori.

Le esperienze del Righi, fatte con tre elettrodi, mostrarono che non è ammissibile la deviazione della corrente per parte del magnete, e concordano invece con la spiegazione che l'A. dà del fenomeno, la quale è convalidata anche da altre sue esperienze.

S. P. THOMPSON. *Aggiustamento dei rocchetti di resistenza.* — Il metodo proposto consiste nel costruire il rocchetto con un filo la cui resistenza sia un poco maggiore per es. dall'1 al 4 per %, di quella voluta, nel determinarne esattamente il valore coi metodi soliti, e nel ridurla poi al valore esatto con l'unire al filo medesimo, parallelamente, cioè a modo di derivazione, un altro rocchetto, la cui resistenza si calcola molto facilmente, e che varia in pratica da 10 a 80 ohms se la resistenza che si vuole aggiustare non supera 10 ohms. Suppongasì di voler così ridurre al valore esatto di 1 ohm un filo che ha una resistenza maggiore: è facile persuadersi che se la resistenza effettiva del filo di derivazione differisce del 2 per % da quella calcolata, l'errore che si avrà nella resistenza finale sarà minore di 0,0002 ohms, quando la derivazione è di 10 ohms, e minore di 0,00001 ohms se la derivazione è di 50 unità.

Per aggiustare rocchetti di resistenza maggiore di 10 ohms,

lora si confrontano le conducibilità dei diversi sali fra loro, si trova che esse sono in ragione inversa dell'equivalente, per cui si può scrivere:

$$(1) \quad c = k \frac{p}{e}.$$

Il coefficiente k è lo stesso per tutti i sali neutri studiati.

Se facciamo nella (1) $p = e$, vediamo che *la conducibilità molecolare di tutti i sali neutri è la stessa*. Per i sali che cristallizzano anidri è facile diluirli (0,001, oppure 0,00025) talmente che la legge si verifichi; ma per i sali idrati bisogna diluirli assai più; e l'A. provò che la loro conducibilità si approssimava a quella legge a misura che si diluiva la soluzione.

Le esperienze furono eseguite confrontando le resistenze r di soluzioni contenenti un ventesimo, un duecentesimo, un millesimo, un quattromillesimo di sale disciolto, con le resistenze di soluzioni di cloruro di potassio di identica concentrazione. Il rapporto di queste resistenze, variabile con la diluizione, deve, al limite, confondersi col rapporto ρ degli equivalenti.

I due quadri seguenti danno il grado di esattezza della legge.

SALI ANIDRI.

Formula	Equivalente	valori di r per concentrazioni di				
		$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{4000}$	ρ
AzH^4Cl	53,5	0,743	0,730	0,724	"	0,718
KCl	74,5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
$\text{AzH}^3\text{O}, \text{AzO}^5$. .	80,0	1,203	1,184	1,156	1,138	1,074
KO, SO^3	87,0	1,507	1,338	1,257	1,182	1,169
KO, CrO^3	98,0	1,473	1,375	1,312	"	1,304
KO, AzO^5	101,0	1,555	1,431	1,371	"	1,356
KBr	119	1,472	1,536	1,531	"	1,597
K, OCIO^5	122,5	"	1,717	1,649	"	1,649
KO, ClO^7	138,5	"	1,898	1,867	"	1,859
AgO, SO^3	156	"	"	2,131	1,981	2,094
PbO, AzO^5	165,5	3,721	2,834	2,530	2,212	2,221
KI	166	2,132	2,202	2,108	"	2,233
AgO, AzO^5	170	2,865	2,480	2,480	2,149	2,281

SALI ANIDRI O FORMANTI CON L'ACQUA, COMBINAZIONI CHIMICHE
DEFINITE.

	<i>e</i>	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{100000}$	<i>p</i>
CuCl	55,5	1,071	0,998	0,932	„	0,880	0,745
KFl	58,0	„	0,999	0,959	„	0,942	0,778
MnCl+4HO . . .	99,	2,070	1,808	1,678	„	1,597	1,329
MgCl+6HO . . .	101,5	1,824	1,645	1,541	„	1,402	1,362
BaCl+2HO . . .	122	2,114	1,857	1,772	„	1,558	1,638
CuO,SO ^s +5HO .	124,75	5,241	3,703	2,664	„	2,194	1,674
NaO,CO ^s +10HO .	148	3,581	2,735	2,461	„	2,324	1,919
ZnO,SO ^s +7HO .	144	5,650	3,715	„	2,429	2,358	1,932
CuO,AzO ^s +6HO .	147,75	2,924	2,541	2,486	„	2,251	1,983
ZnO,AzO ^s +6HO .	149	2,842	2,569	2,533	„	2,345	2,000
CdO,AzO ^s +4HO .	155	3,144	2,796	2,701	„	2,559	2,081
NaO,SO ^s +10HO .	161	3,556	2,876	„	2,578	„	2,161

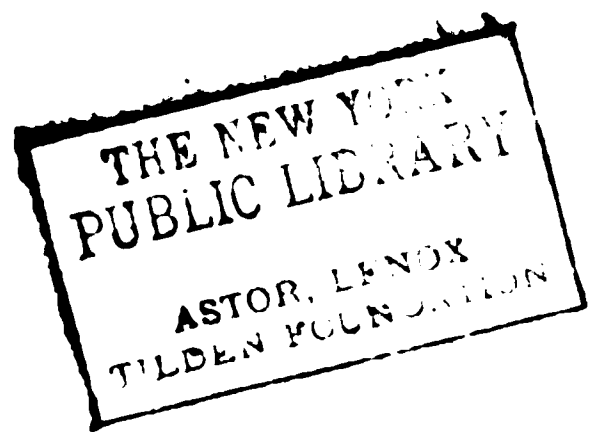
Gli acidi e le basi idratate, i sali acidi degl'acidi polibasici si comportano in modo particolare. L'A. pubblicherà in breve la continuazione de' suoi lavori.

Il Berthelot, nella seduta del 21 Gennajo, parlò e insistè molto sulla importanza dei risultati ottenuti dal Bouty. Secondo quella legge la resistenza elettrica è determinata dall'equivalente chimico e non dal peso atomico, e perciò appare che essa abbia relazione con la legge del Faraday. I pesi equivalenti son dunque la base delle leggi elettrochimiche, nello stesso modo col quale le leggi fisiche hanno relazione con le masse. Tutte queste leggi divengono infatti oscure e complicate esprimendole per mezzo dei pesi atomici.

M. IZARN. *Sulla repulsione di due parti consecutive di una stessa corrente.* — L'A. presenta una nuova disposizione per verificare il noto fatto di Ampère.

X.





QUALITÀ DEL CARBONE	Conducibilità elettrica della sostanza ben disseccata — Le sostanze sono scritte in ordine di conducib. elettrica crescente	Idrogeno su 100 parti di sostanza dissecc. a 200°
I Acido ulmico, ulmina, acido umico, umina ottenuti per la ebullizione di una so- luzione di zucchero con un po' di acido solforico, fuori e in contatto dell'aria come indica Mulder (Berzelius, <i>Fasti politecnici</i> , Chimica organica) Vol. III pag. 190 e seg.	Non conduce affatto. Infatti interposta fra due piccole lamine metalliche in co- municazione coi poli della pila di 400 elementi il galvanometro non ha de- viato affatto. Se però aveva preso un poco d'umido col tenerla esposta al- l'aria per qualche ora, il galvanome- tro deviava assai. Questa osservazione vale per tutti gli altri carboni poco conduttori ⁽¹⁾ .	4,2
II Sostanza ulmica del legno lungamente sotterrato.	Non conduce. Le stesse esperienze pre- cedenti.	4,3 a 5,2
III Ligniti di varie località.	Non conducono. Solamente con qualche campione ben secco ho avuto deboli cenni di conducibilità che debbono at- tribuirsi a tracce di minerali condut- tori (piriti) che si trovano disseminate intorno a certi punti ⁽²⁾ .	2,8 a 3,7
IV Carbone ottenuto carbonizzando il legno a 280°-300°.	Non conduce.	3,0 a 3,7
V Carbone ottenuto come capomorto del- l'azione del cloro sopra gli idrocarburi del petrolio di America.	Non conduce.	2,3 a 2,9
VI Carbone ottenuto come capomorto della distillazione della colofonia.	Non conduce.	1,6 ad 1,9
VII Nero di ossa del commercio purificato per lunga ebullizione con l'acido cloridrico diluito.	Non conduce. Ma però se viene arroventa- to all'aria per una mezz'ora, acquista una certa conducib., permanentemente.	1,3 ad 1,3
VIII Nero fumo di Venezia, ottenuto per la combustione delle trementine: purifica- to per l'azione dell'alcole bollente, della soda e dell'acido cloridrico.	Conduce, ma poco.	1,0 ad 1,3
IX Carbone di legna leggero, ottenuto per incompleta carbonizzazione, in vasi chiusi a circa 450°-500°.	In alcuni punti si hanno segni di con- ducibilità, ma debolissima.	1,3 ad 1,5
X Bracia di forno da pane.	Alcuni pezzi conducono a malapena: al- tri non conducono affatto.	1,2 ad 1,4
XI Carbone di legno di vite, di quercia, di bosso, di zucchero ec. e bracia di for- no mantenuta per 11 ore entro crogiuo- lo chiuso, alla temperatura di fusione del rame.	Conduce bene. Con due sole Bunsen si osserva una piccola scintilla d'incan- descenza quando vi si fanno scorrere (vicini fra loro) i reofori.	1 ad 1,05
II Nero di fiamma ottenuto da 20 brucia- tori Bunsen, che bruciavano con fiam- ma un po' luminosa, sopra una canna di ferro mantenuta a rosso scuro. È nero vellutato ed ha una debole coe- renza, serbando la forma della canna sopra cui si è deposto.	Conduce tanto più quanto più è com- presso, in un tubo o fra due lamine ⁽³⁾ .	0,44

(1) Essi conducono tanto meglio quanto maggiore è l'umidità che contengono.

(2) Le *piriti* di ferro, i solfuri di nikel, cobalto, bismuto, argento, rame, le galene, la pirolunte
ec. godono di una conducibilità metallica, Wartmann, *Bibl. Un. de Genève* 1853, e Du Moncel,
Ann. de Ch. et de Phy. s. V. T. X.(3) Un disco di nero di fiamma, compresso, fa parte di uno strumento che Edison ha chiamato
microtasimetro.

III. Dalla tavola precedente risulta chiaramente che qualunque sia la sostanza organica da cui si parte per ottenere il carbonio con successive trasformazioni per via degli ossidanti o diidrogenanti (ossigeno, cloro, ec.) o per l'azione del calore, la conducibilità dapprima nulla (se la sostanza organica punto di partenza, era solida) si mantiene pure nulla nelle prime trasformazioni, finchè per l'azione prolungata di una temperatura vicina al rosso scuro appaiono tracce di conducibilità, nello stesso tempo che la quantità d'idrogeno percentuale è ridotta all'1,20 circa. Seguitando ancora l'azione del calore a più alta temperatura la carbonizzazione si fa più completa, e mentre la quantità d'idrogeno percentuale si fa sempre più piccola, la conducibilità diventa sempre maggiore, e l'aumento continuerebbe, non vi è dubbio, ancora per le elevatissime temperature che si ottengono con l'arco voltaico, trasformandosi in tali condizioni il carbonio ordinario o amorfo, in grafite, come ha stabilito il Berthelot nelle sue belle ricerche sul carbone (1).

La quantità per cento di idrogeno che si trova nel carbone nel quale comincia ad osservarsi la conducibilità è stata quasi sempre la stessa ed ha oscillato ben poco con carboni omogenei ottenuti da sostanze diversissime come cellulosa, zucchero, idrocarburi ricchissimi in idrogeno come le paraffine; eteri composti, acidi grassi ec. ec. Inoltre esso si trova sempre in tutte le specie di carboni, anche in quelle perfettamente esenti da azoto e da ossigeno; e per l'azione delle temperature le più elevate esso rimane sempre, mentre questi altri due elementi sono già quasi completamente scomparsi (2). Ecco perchè nelle analisi dei carboni ho preso piuttosto di mira l'idrogeno.

IV. Si noti però che si possono fare ad arte e potrebbero benissimo trovarsi formate, delle mescolanze conduttrici fatte con carbonio buon conduttore intimamente impastate con una sostanza che potrebbe anche esser ricchissima d'idrogeno, per modo

(1) Berthelot, *Recherches sur les états du carbone Ann. de Ch. et de Phys* 4. s. T. XIX. pag. 392 e pag. 419.

(2) Molte volte il carbone di storta contiene tracce di azoto; che si possono riconoscere riscaldandolo col potassio ec. ec.

Qualunque sia la causa di questo fatto non deve maravigliare dacchè appunto col carbone scaldato a bianco insieme con potassa, si può ottenere in quantità cianuro di potassio col farvi passare una corrente di azoto.

SUL CALORICO TOTALE SVOLTO DA UNA O PIÙ SCINTILLE GENERATE
DALLA SCARICA DI UN CONDENSATORE; RICERCHE DEL PROF. EMI-
LIO VILLARI (1).

**CALORE DELLA ECCITATRICE UNICA ED EFFETTI DELLE PICCOLIS-
SIME SCINTILLE** — Se consideriamo nella tabella I, la II serie di
esperienze, noi scorgiamo che quando gli elettrodi del termome-
tro congiuntivo erano a contatto (esperienza 1) così che la scari-
ca produceva la sola scintilla eccitatrice, allora il calore prodotto
da essa scarica è minimo. Se poi si faceva produrre una congiun-
tiva piccolissima, frazione di millimetro, il calore cresceva sen-
sibilmente, per poi decrescere un po' con le maggiori lunghezze
della congiuntiva istessa: in modo che ad una piccolissima con-
giuntiva rispondeva un lieve massimo nel calore della scarica.
Alla medesima conclusione conduce l'osservazione della I serie
della medesima tabella, sebbene in essa non è registrata l'espe-
rienza corrispondente alla scintilla congiuntiva zero, ed al mini-
mo del calore ricordato.

A confermare codesta diversa efficacia della scarica a pro-
durre calore, a seconda che dà luogo alla sola eccitatrice, ovvero
e questa e ad una congiuntiva più o meno lunga, eseguii varie
esperienze in diverse circostanze; e le medie di 5 misure per cia-
scun caso sono qui di seguito riportate:

(1) *Continuazione e fine. Vedi pag. 145.*

TABELLA X.

Serie di esperienze	Lunghezza coniuntiva	Calore totale
	L	C
I	piccolissima	31,92
	1 ^{mm} ,4	28,80
	3,4	30,60
II	0	24,4
	piccolissima	29,9
	1,4	26,9
III	0	36,6
	0,3	41,9
	0,8	39,1
	3,8	39,2
IV	0	34,2
	piccolissima	44,0
V	0	35,65
	piccolissima	41,75
VI	0	35,65
	piccolissima	41,75

Questi numeri mostrano chiaro, come si è detto, che il calorico totale svolto dalla sola eccitatrice, per congiuntiva 0, è minimo. Quindi cresce alquanto per effetto di una congiuntiva piccolissima, così da pervenire ad un lieve massimo, per poi decrescere un po' e raggiungere il mentovato valor costante; il quale troverebbesi così compreso fra il massimo ed il minimo valore surriferito. Questa efficacia delle piccole scintille già feci notare altra volta (1); e dimostrai che essa è dovuta alla proprietà che hanno di fare allungare assai sensibilmente l'eccitatrice concomitante, e di portare così nelle scintille esterne parte dell'energia della scarica interna del condensatore. Ora dalle cose su esposte potremo, generalizzando dire:

Che una data scarica produce sempre più calore con due scintille che con una sola.

(1) Villari. *Sulla lunghezza di una o più scintille ec.* — *R. Acc. dei Lincei*, vol. XIII, serie 3. 1882, Roma.

Il qual principio fa riscontro all' altro già ricordato nella memoria citata; cioè che la lunghezza somma di due scintille è sempre superiore alla lunghezza della eccitatrice unica.

E siccome dimostrarai che non solo le brevissime congiuntive, ma bensì le brevissime eccitatrici hanno la proprietà istessa, di render cioè massima la somma della lunghezza delle due scintille, così io mi studiai di osservare se del pari le brevissime eccitatrici erano atte a produrre un aumento di calorico, oltre la media costante più sopra dimostrata. Perciò sperimentai al solito modo coi due palloni; e facendo la congiuntiva della massima possibile lunghezza ottenni i vari dati seguenti, medii di 5 o più misure eseguite per ciascun caso sperimentale:

TABELLA XI.

Serie di esperienze	Cariche	Numero bottiglie	Lunghezza congiuntiva	Calore totale
I				
medie di 5 misure	18	6	40 ^{mm}	49,20
»			45	52,98
»			50	55,68
»			51	non passò la scarica
II				
medie di 5 misure	26	6	42	32,85
»			47	35,24
»			41	33,00
»			47	35,38
»			41	34,10
medie di 10 misure			47	37,00
»			43	34,99
III				
medie di 5 misure	56	12	47	61,06
»			42	55,36
»			47	61,34
»			48	64,05
»			42	60,36

Nello specchio precedente sono riuniti i risultati di varie serie di misure, fatte in diversi tempi coi palloni piccoli e coi grandi, e con diverse cariche. Tutti tali risultati, medi di molte misure, mostrano concordemente che l'efficacia termica delle due scin-

per la media di 20 a 25^{mm}, e per la minima di 1 o 2^{mm}. Per ciascuna lunghezza le misure furono ripetute 5 volte; e successivamente le esperienze si eseguirono alternamente per le tre indicate lunghezze. In una I serie di ricerche si adoperarono 6 bottiglie e 18 cariche, ed in una II serie si adoperarono invece 24 cariche. I risultati medii di dette misure, relative al calore totale della congiuntiva ed eccitatrice, sono iscritti nella tabella seguente:

TABELLA XII.

Lunghezza congiuntiva L	Calore totale C	M E D I E	
		Generali	Finali
I	II	III	IV
I Serie			
44	37,8	39,41	} 40,90
22	44,0		
2	42,8	42,40	
44	37,64		} 45,50
22	45,1		
2	42,7		
44	41,9		
22	45,4		
2	42,7		
II Serie			
1	37,98	38,22	} 38,06
25	42,30		
50	37,28	37,90	
1	39,00		} 42,50
25	42,88		
50	38,06		
1	39,30		
25	43,44		
50	37,90		
1	36,60		
25	41,76		
50	38,46		

Nella precedente tabella, noi troviamo nella I colonna indicate le lunghezze L della congiuntiva: nella II il calore svolto da essa e dall'eccitatrice concomitante: nella III sono riportate

TABELLA XIII.
Bottiglie 6 : cariche 20.

Lunghezza congiuntiva nei termometri		Calore delle due congiuntive C	Medie generali del calore C	
IV	V			
39	1	40,36	40,88	39,77
20	20	39,74		
1	39	39,70	38,80	
20	20	41,18		
39	1	41,40		
20	20	39,90		
1	39	37,90		
20	20	38,26		
			39,84	39,77

Altre esperienze identiche furono altre volte eseguite, ma con un indice termometrico molto più lungo che precedentemente, e perciò le deviazioni furono meno ampie: ed i risultati di queste nuove indagini, medie di 5 misure sono qui di seguito riportate:

TABELLA XIV.
Bottiglie 6 : cariche 20.

Lunghezza congiuntiva nei termometri		Calore delle due congiuntive C	Medie generali del calore C	
IV	V			
39	1	25,40	25,88	25,19
1	39	23,98	24,54	
20	20	24,20		
39	1	25,48		
20	20	25,16		
39	1	26,75		
20	20	26,38		
1	39	24,96		
20	20	25,02		
1	39	24,67		
20	20	25,62		
			25,21	25,19

Indice = 210^{mm}.

5^{ma}. In una II serie invece si variò nel medesimo modo la scintilla del termometro V, e si mantenne costantemente di 5^{mm} quella nel termometro IV. Ciascuna serie fu eseguita prima con lunghezze della congiuntiva crescenti, e poi decrescenti; le misure si ripeterono 5 volte per ciascuna lunghezza di scintilla, e di esse misure le medie sono trascritte nella seguente tabella:

TABELLA XV.

Bottiglie 6 : cariche 18.

L'indice si abbassò di 10^{mm},5 durante le esperienze.

Nelle colonne 5 e 9, della tabella precedente, sono riportate le medie delle misure del calore totale prodotto dalle tre scintille, e corrispondente alle varie lunghezze delle congiuntive e della eccitatrice: e da esse colonne si rileva, detto calore essere quasi affatto costante; il che meglio ancora si scorge dalla tabella seguente, ove ho riportato le medie generali di quelle trascritte nelle accennate colonne precedenti 5 e 9:

TABELLA XVI.

Lunghezza delle due congiuntive I	Calore medio II	Differenze da 83,42 III
10	32,90	—1,52
20	35,10	+1,68
30	33,77	+0,35
35	32,96	—0,46
40	32,36	—1,02
	<hr/> 33,42	

I valori della colonna II sono da ritenersi pressochè costanti e pochissimo differenti dalla media finale 33,42, come bene rilevasi dalla colonna III, delle differenze; pure a tutto rigore da essa scorgesi un lieve massimo di calore quando la lunghezza somma delle congiuntive è compresa fra 20 e 30^{mm}. E siccome la somma totale delle tre scintille nelle precedenti esperienze, di poco superava i 40^{mm} (6 bottiglie e 18 cariche), così se ne inferisce, come pel caso delle due sole scintille, che a metà del periodo quasi costante producesi un lieve massimo di calore, quando le tre scintille abbiano lunghezze poco differenti fra loro.

A conclusioni identiche conducono i risultati della tabella seguente, ottenuti in maniera analoga alla precedente, salvo che nelle esperienze che seguono variai in ciascuna serie di misure la lunghezza delle scintille in entrambi i palloni, invece che in uno solo; e dette misure eseguii successivamente con scintille congiuntive prima crescenti e poi decrescenti in lunghezza:

TABELLA XVII.

Bottiglie 6 : cariche 18.

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
	media 33,95

Dai valori riassunti nella penultima colonna noi troviamo, che in media il calore delle tre scintille non varia con le lunghezze delle due congiuntive; e ciò meglio rilevasi dall'ultima colonna delle differenze. Tuttavia il minuto esame di essa mostra che anche in questi risultati manifestasi un lieve massimo del calore, corrispondente ad una lunghezza somma delle congiuntive di circa 28^{mm} a 30^{mm}; e perciò per una lunghezza pressochè eguale delle tre scintille.

Se nonchè queste misure rispondono a variazioni troppo ristrette nelle lunghezze delle congiuntive (10 a 40), e per ciò i risultati non possono considerarsi come generali. Laonde io valendomi del medesimo apparato a piccoli palloni ripetei analoghe misure con lunghezze di congiuntive che variarono da 0 a 40^{mm}; ed i risultati medii di 5 misure per ciascun caso sono riportati nella seguente tabella:

Dai dati precedenti noi scorgiamo che la media generale delle 10 misure dei calori svolti (ultima linea) quando le congiuntive erano ciascuna di 1^{mm} fu di 50,95, e fu di 51,52 quando le dette lunghezze furono di 20^{mm} ciascuna: e le differenze di dette medie, corrispondenti ogni una a 50 misure alternate fu di 0,57, ossia di circa un centesimo del calor totale: differenza assolutamente inapprezzabile, e certamente minore non si sarebbe potuto sperare se si considerano le difficoltà che s'incontrano in questo genere di indagini. Laonde, e per queste e per tutte le altre molteplici ricerche analoghe noi possiamo ritenere come fatto sicuro:

« Che la quantità di calorico prodotta da una data scarica, per mezzo di tre scintille è costante, qualunque sia la loro rispettiva lunghezza, purchè nessuna sia piccolissima.

In quanto all'efficacia termica della scarica, anche qui notai che il calore prodotto dalla sola eccitatrice è minore di quello che si svolge da questa e da una o due congiuntive insieme. Così avendo coi soliti tre palloni grandi, alcune volte fatto produrre la sola eccitatrice, ed altre volte questa ed una o due congiuntive, ottenni i dati seguenti, medii di 5 misure per ciascun caso:

TABELLA XXIV.

Bottiglie 12: cariche 40.

Lunghezza congiuntiva nel termometro		Calore totale
IV	V	
0	0 (1)	21,38
1	0	29,10
1	1	32,14
2	2	32,78
5	5	31,15
10	10	31,68
15	15	30,88

Onde si scorge che il calore è minimo per una sola scintilla, cresce per due, e forse cresce ancora, sebbene un po' meno, per

(1) Gli elettrodi erano a contatto, pure nella scarica si produceva un piccolo sprazzo di luce.

4° Il calore totale di due scintille congiuntive, di lunghezza somma costante è costante, pur variando comunque le loro rispettive lunghezze.

5° Laonde il calore svolto dalle scintille congiuntive è proporzionale alla loro lunghezza; e forse la temperatura ne è indipendente.

6° Nel periodo del calore somma quasi costante (N. 3) rilevasi un lieve *massimo*, quando la congiuntiva raggiunge una lunghezza presso a poco eguale alla eccitatrice.

6° Nel periodo delle lunghezze somme quasi costanti (N. 3) rilevasi un lieve *minimo*, quando la congiuntiva raggiunge una lunghezza presso a poco eguale alla eccitatrice.

E qui scorgesi che il lieve massimo del calore coincide col lieve minimo della lunghezza somma delle due scintille.

7° Questo lieve massimo di calore è esclusivamente dovuto alla eccitatrice, perchè due sole congiuntive non lo presentano (N. 4); e forse la eccitatrice, nell'accorciarsi in quei dati limiti, aumenta un po' di diametro.

8° Quando, oltre la congiuntiva, si produce nel circuito una eccitatrice brevissima, il calorico prodotto da ambedue raggiunge un lieve massimo.

7° Questo lieve minimo è naturalmente dovuto all'eccitatrice che in quelle date circostanze s'accorcia un po' più che l'accrescimento della congiuntiva non esigerebbe.

8° Quando, oltre la congiuntiva, si produce nel circuito una eccitatrice brevissima, la loro somma raggiunge un massimo.

per 4 giorni, il rimanente pel distacco dell'ancora pochi minuti primi; il che deve sottintendersi per le successive prove.

I risultati sono:

	A"	B"
Cs.	66	?
Ps.	662	510
Ct.	117	90
Cp.	34	33.

Il magnetismo che scompare allo strappo è pressochè costante sia caricando l'ancora, durante tutto il tempo del contatto, sia solo alla fine. Anche il permanente non subì che leggerissime variazioni nella quantità e distribuzioni. Per conseguenza rimase all'incirca costante il peso per lo strappo in ogni caso.

Furono smagnetizzate di nuovo coll'azione del fuoco, temprate e calamitate a $\frac{3}{4}$, circa della saturazione, indi abbandonate a sè, la A" per 7 giorni, la B" per 25.

La A" diede:

Ct. 126 Cp. 42.

Armata e strappando subito:

Cs. 66 Ps. 680 Ct. 126 Cp. 42.

Id. id. dopo 6 giorni

Cs. 66 Ps. 715 Ct. 129 Cp. 42.

Id. id. aumentando gradatamente il carico per 6 giorni fino a grammi 700:

Cs. 66 Ps. 736 Ct. 130 Cp. 42.

Risultati analoghi ai precedenti. È solo a notarsi un leggerissimo aumento nel magnetismo che rimane nella calamita dopo il contatto prolungato dell'ancora, sia caricandola in questo frattempo che no; ed in corrispondenza ad esso un debole aumento nel peso di strappo.

E la B": Ct. 126 Cp. 44 e strappando subito dopo: Cs. 81 Ps. 850 Ct. 126 Cp. 45.

di reggerne uno maggiore. Invece abbiamo veduto che nulla di ciò si è in modo distinto verificato. Osserveremo infine che se la reazione magnetica dell'ancora aumentasse in ragione della forza di trazione esercitata su di essa, con un galvanometro così sensibile come quello da noi impiegato, tirando l'ancora senza distaccarla, avrebbesi pur dovuto avvertire un qualche movimento nell'ago, mentre invece esso rimane sempre e perfettamente immobile (¹).

Le calamite A, B; A', B', già adoperate furono ridotte a metà lunghezza, indi nuovamente temprate, magnetizzate e lasciate senza ancora per tre giorni. Le chiameremo *a*, *b*; *a'*, *b'*. La stessa riduzione di lunghezza fu eseguita anche nelle rispettive àncore.

Valori ottenuti colle *a*, *b*.

<i>a</i> :	Ct. 70	Cp. 35
<i>b</i> :	Ct. 80	Cp. 30.

Armato togliendo l'ancora:

<i>a</i> :	Cs. 75	Ct. 70	Cp. 35
<i>b</i> :	Cs. 85	Ps. 442	Ct. 82 Cp. 30.

Id. id. e strappando dopo 6 giorni per la *a*, e dopo 8 per la *b*.

<i>a</i> :	Cs. 80	Ct. 75	Cp. 30
<i>b</i> :	Cs. 83	Ps. 431	Ct. 80 Cp. 30.

Id. id. per la sola *b* ma strappando subito:

<i>b</i> :	Cs. 85	Ps. 430	Ct. 80 Cp. 30.
------------	--------	---------	---------------------

Id. id. per la sola *a*, e strappando dopo 10 giorni:

<i>a</i> :	Cs. 80	Ct. 75	Cp. 30.
------------	--------	--------	---------

Alla *b* si diede durante 10 giorni un carico continuo crescente fino a 360 grammi, indi lasciata con questo peso ancora per un giorno e poi sperimentata:

<i>b</i> :	Cs. 80	Ps. 419	Ct. 80 Cp. 30
------------	--------	---------	--------------------

(1) Per queste prove abbiamo messo l'istrumento in condizione di massima sensibilità, tenendo la calamita direttrice in modo che i suoi poli e quelli dell'ago volti da una stessa parte fossero gli omonimi, ed a conveniente distanza fra loro; inoltre il cannocchiale di lettura a 6 metri e più di distanza.

Per distinguerle le chiameremo: $\alpha, \beta; \alpha', \beta'$.

Risultati ottenuti colle α e β

α : Ct. 20 α' : Ct. 25.

Ancorate e strappando immediatamente:

α : Cs. 65 Ct. 20 α' : Cs. 75 Ct. 25.

Id. id. dopo 8 giorni e ripetendo lo strappo

α : Cs. 66 Ct. 19 α' : Cs. 82 Ct. 22

α : Cs. 65 Ct. 19 α' : Cs. 75 Ct. 22.

Smagnetizzate col calore, temprate e di nuovo magnetizzate, indi lasciate senz' àncora per un giorno e provate :

α : Ct. 22 α' : Ct. 30.

Armate e strappando subito:

α : Cs. 70 Ct. 22 α' : Cs. 80 Ct. 30.

Id. id. e tolta l' àncora dopo 8 giorni e rinnovando lo strappo:

α : Cs. 71 Ct. 21 α' : Cs. 87 Ct. 27

α : Cs. 70 Ct. 20 α' : Cs. 75 Ct. 28.

E colle β, β' :

β : Ct. 20 β' Ct. 25.

Ancorate e strappando subito e ripetendo lo strappo:

β : Cs. 55 Ct. 20 β' . Cs. 60 Ct. 25

β : Cs. 55 Ct. 20 β' . Cs. 60 Ct. 25.

Rimessa l' àncora e lasciatala per 8 giorni indi strappando
● ripetendo lo strappo due volte:

β : Cs. 65. Ct. 17 Cs. 55 Ct. 17 Cs. 55 Ct. 17.

La β' cadde al suolo, e per essa non si presero misure.

Distrutto di nuovo il magnetismo delle $\beta\beta'$ per opera del calore, rinnovatane la tempra e la magnetizzazione, e tenute senz' àncora per un giorno:

β : Ct. 25 β' . Ct. 25.

Munite di àncora e strappando subito dopo, due volte di seguito:

$$\begin{array}{ll} \beta : \text{Cs. 60 Ct. 25} & \beta' : \text{Cs. 62 Ct. 26} \\ \beta : \text{Cs. 60 Ct. 25} & \beta' : \text{Cs. 60 Ct. 25.} \end{array}$$

Id. id. ed operando tre distacchi successivi dopo 10 giorni:

$$\begin{array}{ll} \beta : \text{Cs. 62 Ct. 22} & \beta' : \text{Cs. 67 Ct. 23} \\ \beta : \text{Cs. 55 Ct. 20} & \beta' : \text{Cs. 60 Ct. 22} \\ \beta : \text{Cs. 55 Ct. 20} & \beta' : \text{Cs. 60 Ct. 23.} \end{array}$$

Di nuovo scalamitate, temprate e magnetizzate come prima, s' ebbero dopo che rimasero senz' àncora per 2 giorni, i seguenti risultati:

$$\beta : \text{Ct. 20} \quad \beta' : \text{Ct. 25.}$$

Ancorando, strappando e ripetendo lo strappo:

$$\begin{array}{ll} \beta : \text{Cs. 60 Ct. 20} & B' : \text{Cs. 67 Ct. 25} \\ \beta : \text{Cs. 60 Ct. 20} & B' : \text{Cs. 67 Ct. 25.} \end{array}$$

Id. id. dopo 8 giorni, e ripetendo lo strappo due volte:

$$\begin{array}{ll} \beta : \text{Cs. 65 Ct. 18} & \beta' : \text{Cs. 68 Ct. 25} \\ \beta : \text{Cs. 57 Ct. 17} & \beta' : \text{Cs. 66 Ct. 24} \\ \beta : \text{Cs. 57 Ct. 17} & \beta' : \text{Cs. 65 Ct. 24.} \end{array}$$

Prove analoghe si fecero con quattro altre calamite α'' , b'' ; α''' , b''' le prime due dell' acciaio Q delle $\alpha\beta$, e delle stesse dimensioni, le altre uguali per dimensioni e qualità (acciaio Q') delle $\alpha'\beta'$. Si esperimentarono dapprima le α'' , α''' , a cui diedesi la metà circa del magnetismo necessario alla saturazione, ed in seguito tenute senza àncore per 24 ore:

$$\alpha'' : \text{Ct. 12} \quad \alpha''' : \text{Ct. 25.}$$

Armato e strappando subito:

$$\alpha'' : \text{Cs. 55 Ct. 12} \quad \alpha''' : \text{Cs. 70 Ct. 25.}$$

Id. id. dopo otto giorni e replicando:

$$\begin{array}{ll} a'' : \text{Cs. 62 Ct. 10} & a''' : \text{Cs. 77 Ct. 22.} \\ a'' : \text{Cs. 55 Ct. 10} & a''' : \text{Cs. 70 Ct. 21.} \end{array}$$

Magnetizzate a saturazione e tenute disarmate un giorno:

$$a'' : \text{Ct. 20} \quad a''' : \text{Ct. 40.}$$

Ancorate e distaccando:

$$a'' : \text{Cs. 75 Ct. 20} \quad a''' : \text{Cs. 125 Ct. 40}$$

Id. id. strappando dopo 8 giorni e replicando:

$$\begin{array}{ll} a'' : \text{Cs. 71 Ct. 20} & a''' : \text{Cs. 123 Ct. 38} \\ a'' : \text{Cs. 72 Ct. 20} & a''' : \text{Cs. 122 Ct. 37.} \end{array}$$

E le b'' , b''' a cui venne dato il magnetismo a saturazione ed abbandonate a sè senz'ancora per 2 giorni:

$$b'' : \text{Ct. 25} \quad b''' : \text{Ct. 35.}$$

Armata e strappando subito:

$$b'' : \text{Cs. 75 Ct. 25} \quad b''' : \text{Cs. 105 Ct. 35.}$$

Id. id. strappando dopo 8 giorni e ripetendo una volta:

$$\begin{array}{ll} b'' : \text{Cs. 77 Ct. 20} & b''' : \text{Cs. 107 Ct. 32} \\ b'' : \text{Cs. 67 Ct. 20} & b''' : \text{Cs. 97 Ct. 30.} \end{array}$$

Risulterebbe da queste prove che le calamite non soffrono indebolimento di sorta per lo strappo anche ripetuto delle loro àncore effettuato subito dopo la loro costruzione, e che all'incirca costante rimane il magnetismo che l'àncora vi induce col contatto. Tenute armate per giorni la corrente di strappo e quindi il magnetismo temporario subisce, meno pochissime eccezioni, un semplice aumento, mentre resta di poi quasi sempre indebolito quello permanente. Un successivo distacco dell'àncora dà una indotta minore di prima e generalmente anche inferiore a quella che si aveva per un primo ed anche replicato distacco avanti l'azione prolungata dell'àncora. Il loro magnetismo permanente diventa

a disorientare le sue molecole; onde non potrà esservi seria difficoltà ad ammettere, che queste abbiano per tal fatto ad assumere poscia una posizione di equilibrio stabile corrispondente ad una orientazione permanente, minore di quella che possedevano avanti di essere state lungamente armate. In tal modo anche il fatto più sopra constatato di uno svigorimento nel magnetismo permanente nelle calamite corte per lo strappo dell'ancora dopo un contatto prolungato, troverebbe plausibile spiegazione. Nè vi sarebbe di ostacolo il fatto che se da tali calamite si strappi l'ancora appena armata, non risente indebolimento di sorta il loro magnetismo permanente siccome risultò dalle esperienze sopra esposte, perchè l'efficacia di una azione smagnetizzante non solo dipende dalla rapidità con cui questa comincia, ma dalla sua grandezza ('). Or quando dopo alcuni giorni si toglie bruscamente l'ancora dalle dette calamite, trovandosi esse di possedere una quantità di magnetismo superiore a quella che avevano appena armate, l'operazione ora detta costituendo per tal fatto un'azione smagnetizzante più intensa di prima, dovrà operare più energicamente nel senso di indebolirle.

Le conclusioni sperimentali e teoretiche a cui siamo giunti, saranno applicabili a calamite d'acciaio a ferro di cavallo, diverse per figura e dimensioni da quelle adoperate, non escluse quelle a fascio?

Non vediamo ragioni perchè ciò non si possa asserire, epperò pur riconoscendo nella sola esperienza l'unico mezzo per rispondere categoricamente, crediamo non ostante di male non apporci nel riconoscere suscettibili della sopra questionata estensione le resultanze avute (').

(1) G. Cantoni. *R. I. Lombardo*, ed A. Righi loc. cit.

(2) In una calamita, la massa dai poli alla curvatura, deve giusta le leggi dell'inerzia operar per l'appunto nello scemare la velocità della smagnetizzazione delle sue parti più vicine all'ancora nell'atto in cui questa viene strappata, e conseguentemente ancor quella di tutte le altre. Perocchè, tutti gli elementi magnetici non potendo risentire contemporaneamente l'azione smagnetizzante del distacco dell'ancora, incominceranno a perdere della loro orientazione dopo un tempo finito tanto più grande, quanto più lontani dalle estremità polari. (Vedi i risultati avuti da Donati e Poloni sulla propagazione dello stato magnetico nel *N. Cimento* 1875), onde quelli a queste più vicini, non potranno assumere la posizione corrispondente al loro stato magnetico permanente, se prima non l'avranno acquistata tutti gli altri, i quali, venendo alla lor volta influenzati dalla rea-

Id. Id. di	5	1	2	6
"	6	0,8	2	5
"	7	0,8	1	4

ACCIAIO DOLCE.

	Nucleo di 8 Cm.	Id. di 14	Id. di 28
Corrente della pila	85	22	16
Indotta elettrica	7	4	3
" totale	45	45	42
" magnetica	88	41	39
Indotta magnetica residua con interv.			
fra i contatti di $\frac{1}{4}$ di passo della vite.	18	18	25
Id. Id. di $\frac{1}{4}$	11	16	22
" 1	7	10	15
" 1 $\frac{1}{4}$	6	9	12
" 2	8	6	9
" 2 $\frac{1}{4}$	2	4	6
" 8	2	3	7
" 8 $\frac{1}{4}$	2	3	6
" 4	2	3	6
" 4 $\frac{1}{4}$	2	3	6
" 5	2	3	6
" 6	2	3	6
" 7	2	3	6

ACCIAIO TEMPERATO.

	Nucleo di 8 cm.	Id. di 14	Id. di 28
Corrente della pila	87	81	25
Indotta elettrica	8	6	5
" totale	45	45	48
" magnetica	37	39	38
" magnetica residua con interv.			
fra p e q di $\frac{1}{4}$ di passo della vite .	12	15	21
Id id. di $\frac{1}{4}$	10	12	16
" 1	4	6	10
" 1 $\frac{1}{4}$	4	5	7
" 2	3	4	6
" 2 $\frac{1}{4}$	2	4	5
" 3	1	4	5
" 3 $\frac{1}{4}$	1	3	5
" 4	1	2,5	5
" 4 $\frac{1}{4}$	1	2,5	"
" 5	1	2,5	4
" 6	1	2,5	4
" 7	1	2	4

diafragma opaco, e sopra allo specchio si fanno convergere i raggi luminosi, per mezzo di una lente, posta dall'altra parte del diafragma, ma con piccola incidenza. I raggi riflessi cadono sopra un'altra lente che forma sopra uno schermo la immagine di quel foro, dopo esser stati di nuovo riflessi, da un altro specchio che può ruotare intorno ad un asse verticale. Ponendo quel tubo di cauccio in comunicazione con una massa di aria vibrante, e facendo in pari tempo ruotare quell'ultimo specchio, si ottengono sullo schermo le desiderate curve.

Gli autori chiamano quella scatola *capsula palmottica*, derivandola da una parola greca.

M. DUCRETET. *Galvanometro universale*. — È un cerchio verticale simile a quello della bussola dei seni attorno al quale è avvolto il filo, e che può con una cremagliera correre lungo un regolo metallico ed orizzontale, diviso in centimetri e millimetri e che posando sopra una platina retta da viti calanti, può orientarsi a piacere. In una delle due estremità del regolo sta una specie di bussola di declinazione, ove l'ago, che posa sopra una punta fina e non ossidabile, sta immerso in un liquido che gli estingue le oscillazioni. Una forte calamita d'acciaio sta sotto l'ago della bussola, per formare, dice l'A., un campo magnetico assai intenso, che renda poco sensibili le variazioni esterne. Il filo ha una resistenza di 5490 ohm, per cui nelle misure delle forze elettromotrici delle pile le intensità delle correnti sono allora sensibilmente proporzionali a quelle forze, e si può fare su quel regolo una graduazione in *volt*.

V. KARAVODINE. *Nuova modificazione della pompa di Toeppler*. — Nelle pompe a mercurio, il tubo aduttore capillare che ha la sua origine nella parte superiore del globo di vetro, si curva in basso; il che è male, perchè il mercurio non scaccia bene l'aria che quando l'angolo di incontro fra il vetro e il mercurio è quasi retto. L'A. vi rimedia facendo terminare la parte superiore di quel globo di vetro, con un tubicino capillare corto e verticale, a grosse pareti, che rimane masticato e termina dentro un piccolo globetto di vetro e si prolunga con il tubo capillare aduttore, che ripiegandosi due volte scende verticalmente. Quando si innalza il serbatoio di mercurio che è in comunicazione con l'aria libera, il mercurio empie tutto il grosso globo, e poi, escendo superior-

il fondo non è illuminato; dunque quel colore viene per luce riflessa, se la densità è variabile, o per luce diffusa dalle particelle in sospensione. Ma l'A. in un suo precedente lavoro, (*Archiv.* 1870) ha dimostrato che di quelle due cause la seconda è molto più importante della prima. Il colore azzurro si spiega facilmente; perchè i raggi più refrangibili sono diffusi in maggior proporzione degli altri, ed i raggi assorbiti dall'acqua durante il loro cammino, per arrivare alle particelle anzidette e per ritornare indietro, rimangono colorati in virtù dell'assorbimento proprio dell'acqua.

Se il tempo è sereno ma una nube cela il sole, l'acqua appare ancor più azzurra, perchè colorata anche dalla luce azzurra della volta celeste; ma se il sole splende alto sull'orizzonte, la maggior parte della luce che penetra negli strati interni dell'acqua emana direttamente dal sole, per cui il tragitto che essa percorre nell'interno della massa liquida, è relativamente più corto che nei casi ove i raggi incidenti arrivano da tutte le direzioni, il colore azzurro è mescolato a maggior quantità di luce bianca, e l'acqua ha un'apparenza alcun poco lattosa. Se l'acqua del lago è agitata, e la si osserva in una direzione più orizzontale, la riflessione superficiale non predomina più, e invece predominano i raggi che escono dall'interno, e il colore azzurro è più pronunciato.

Se il fondo è nero oscuro, l'acqua sembra azzurra anche quando è poco profonda; ma se il fondo è bianco, se l'acqua è poco profonda e calma, sembrerà, per quel che si disse, verde azzurra guardata verticalmente. Ma se la superficie è agitata, i raggi emergenti non provengono più dal fondo avendo percorso il cammino più corto, e il colore sarà decisamente azzurro. Per es. stando sul ponte della macchina idraulica di Ginevra, guardando in su, verso il lago, ove l'acqua è ancora calma, la si vede verde azzurra; e guardando dall'altra parte del ponte ove l'acqua è agitata, essa pare azzurra.

L'A. finisce la sua Nota spiegando come le sostanze d'origine minerale od organica, sciolte nell'acqua, o sospese, colorino differentemente altri laghi.

M. J.-L. SORET. *Nota sulla grande trasparenza alcune volte presentata dall'atmosfera durante la pioggia.* — La causa prin-

accessorio era positivo, quella radiazione andava a colpire l'elettrodo opposto che era isolato. Anche in questo caso per evitare l'influenza di cause accessorie speciali ai singoli elettrodi, abbiamo fatto sì che ora l'uno ora l'altro dei due elettrodi calorimetrici rimanesse isolato. Nella seguente tabella stanno indicati i risultati ottenuti in queste esperienze. Per le quattro prime colonne e per la sesta valgono le indicazioni date di sopra. Nella colonna I stanno i riscaldamenti dell'elettrodo isolato e nell'ultima colonna i valori del rapporto n/p quali si sono trovati in condizioni simili mediante esperienze fatte con i soliti elettrodi calorimetrici.

H	i	n_1	p_1	I	$n_1 : p_1$	$n : p$
2,87	105	0,374	—	0	—	—
»	100	—	0,055	0,0025	6,8	6,46
0,54	105	0,539	—	0,003	—	—
»	65	—	0,0508	0,0123	10,6	12,7
0,12	62	1,07	—	0,124	—	—
»	26	—	0,236	0,0423	4,53	10,2
0,034	39	1,71	—	0,695	—	—
»	19	—	0,505	0,142	3,39	2,85
0,025	36	2,06	—	0,813	—	—
»	21	—	0,53	0,081	3,89	2,49

Altre esperienze vennero eseguite in condizioni alquanto diverse, mantenendo un reoforo (ordinariamente il positivo) sempre applicato ad uno degli elettrodi calorimetrici ed applicando l'altro ora al secondo di questi elettrodi, ora all'accessorio. Nella seguente tabella sono esposti i risultati relativi.

H	i	n_1	p_1	I	n	p
0,0227	37,5	2,51	—	2,16	—	—
»	44	—	—	—	2,45	1,61
0,0185	19,5	—	1,28	0,143	—	—
»	31	—	—	—	2,88	2,65
0,008	19	—	2,14	0,10	—	—
»	25	—	—	—	2,99	3,38

temperatura. Ma i decrementi della prima sono sensibilmente proporzionali agli aumenti della temperatura; i moduli invece diminuiscono con una ragione più rapida. E neppure qui si trova veruna analogia nell'ordine con cui i decrementi si succedono rispetto alla grandezza dei differenti metalli.

Difatti scrivendo:

$$k = k_0 (1 - \alpha t).$$

ove k_0 e k denotano la conducibilità del filo a 0° e a t° , i metalli rispetto al coefficiente α (tenuto conto delle discrepanze tra i dati dei diversi sperimentatori, dovute certamente alla varietà di stato fisico dei fili cimentati) si potrebbero press' a poco ordinare come segue:

platino, oro, alluminio (?), argento, rame, zinco, piombo, stagno, ferro.

Rispetto poi alla diminuzione effettiva αk_0 della conducibilità specifica per 1° , l'ordine sarebbe il seguente:

argento, rame, oro, alluminio, zinco, platino, stagno, ferro, piombo.

Ed ora se scriviamo:

$$E = E_0 (1 - \epsilon t)$$

ed assumiamo per E ed E_0 i moduli di elasticità a t e a 0° , quali si trovano nella Memoria del prof. Pisati citata nella precedente nota, il numero ϵ rappresenterà il coefficiente medio di decremento nel modulo per ogni grado di aumento nella temperatura del filo. Rispetto a questo coefficiente i metalli si ordinano come segue:

platino, ferro, oro, rame, argento, alluminio.

E ancora rispetto alla diminuzione media ϵE_0 effettiva del modulo per ogni grado di temperatura l'ordine è questo:

platino, ferro, rame, oro, argento, alluminio.

(Continua).

I N D I C E

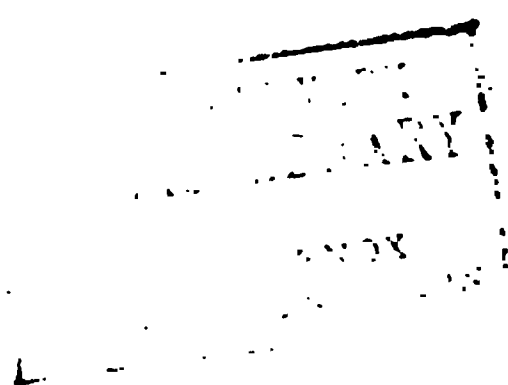
Sul calorico specifico della mellite — Nota di A. BARTOLI ed E. STRACCIATI	pag. 5
Sopra un apparecchio da lezione per dichiarare il primo principio di termodinamica — Nota del prof. ADOLFO BARTOLI	„ 18
Sui cambiamenti di lunghezza d'onda ottenuti colla rotazione d'un polarizzatore e sul fenomeno dei battimenti prodotto colle vibrazioni luminose — A. RIGHI „	23
Sulla variazione nella resistenza elettrica di un filo metallico in relazione ad alcuni disturbi provocati ne' suoi sistemi molecolari — GIUSEPPE GEROSA. (<i>Continua-</i> <i>zione e fine</i>).	„ 88
Ricerche microscopiche sulle tracce delle scintille elettriche incise sul vetro e sul diametri delle scintille stesse — Memoria di EMILIO VILLARI	„ 43
Determinazione della resistenza elettrica di un filo, in misura assoluta — Nota preliminare di ANTONIO ROITI	„ 97
Ricerche sperimentali sul fenomeno di <i>Hall</i> , particolarmente nel bismuto — Me- moria del Prof. AUGUSTO RIGHI	„ 115
Sul calorico totale svolto da una o più scintille generate dalla scarica di un con- densatore — Ricerche del Prof. EMILIO VILLARI	„ 145
Sul contegno di alcune calamite permanenti in presenza delle loro àncore — Ri- cerche sperimentali di E. FOSSATI	„ 158
Il calorico raggianti e il secondo principio di termodinamica — Nota di A. BARTOLI „	193
Relazione fra la conducibilità elettrica e la composizione dei carboni di varie spe- cie — Nota di ADOLFO BARTOLI	„ 208
Sul calorico totale svolto da una o più scintille generate dalla scarica di un con- densatore — Ricerche del Prof. EMILIO VILLARI (<i>Continuaz. e fine</i>)	„ 211
Sul contegno di alcune calamite permanenti in presenza delle loro àncore — Ri- cerche sperimentali di E. FOSSATI (<i>Continuaz. e fine</i>).	„ 232
Informazioni circa agli apparecchi che furono esposti da ANTONIO PACINOTTI al- l'Esposizione internazionale d'elettricità in Parigi „	266
Sul riscaldamento degli elettrodi prodotto dalla scintilla d'induzione nell'aria molto rarefatta — Nota di A. NACCARI e G. GUGLIELMO	„ 272
Una relazione tra l'elasticità di alcuni fili metallici e la loro conducibilità elettro- calorifica — Nota di G. POLONI	„ 279

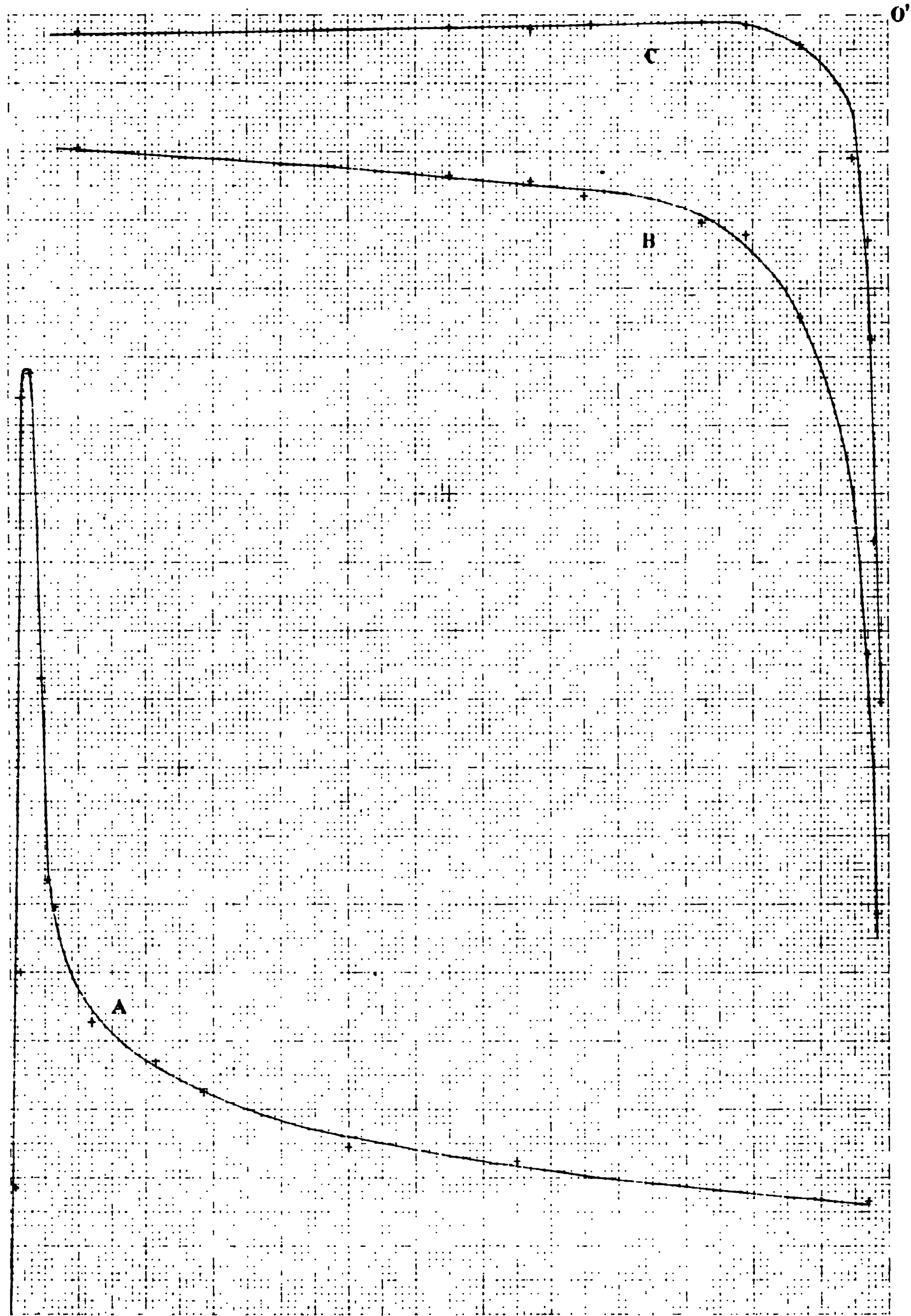
R I V I S T A

M. QUET. Sul potenziale della forza di induzione dovuta ad un solenoide chiuso, la di cui corrente varia di intensità. Analogia con un teorema di elettromagneti- smo. Esperienza del <i>Felici</i>	„ 61
M. G. LE GOARANT DE TROMELIN. Sopra un nuovo galvanometro aperiodico	„ ivi

E. KETTLER. Sulla critica del sig. <i>Voigt</i>	<i>pag.</i>	79
S. CZAPSKI. Sulla variabilità termica della forza elettromotrice delle coppie galvatiche e sulla sua relazione con l'energia libera delle medesime	"	ivi
J. KOLLERT. Sul contegno elettrico delle fiamme	"	80
F. FUCHS. Su un metodo di compensazione per determinare la resistenza di pile non polarizzabili	"	ivi
E. BUDDE. Sulla teoria delle forze termoelettriche	"	ivi
H. LORBERG. Sulla espansione elettrica dei condensatori.	"	81
B. WEINSTEIN. Sul calcolo del potenziale di rocchetti	"	ivi
A. v. WALTENHOFEN. Esperimento istruttivo che può farsi con le pile termoelettriche non simmetriche	"	82
C. CHRISTIANSEN. Sull'emissione del calore dalle superfici non piane	"	ivi
A. TSCHIRCH. Ricerche sulla clorofilla	"	ivi
W. HOLTZ. Esperienza da lezione per dimostrare che la velocità di rotazione cresce coll'avvicinamento delle masse ruotanti all'asse	"	ivi
J. LARMOR. Induzione elettromagnetica in strati superficiali e in corpi solidi conduttori.	"	83
J. W. CLARK. Sulla purificazione del mercurio con la distillazione nel vuoto	"	84
R. H. M. BOSANQUET. Su un galvanometro assoluto	"	ivi
Prof. TAIT. La topologia di <i>Listing</i>	"	ivi
F. J. SMITH. Una nuova forma di cilindro per l'integratore a disco e a cilindro	"	85
J. TYNDALL. Sugli archibaleni.	"	ivi
G. QUINCKE. Sul cangiamento del volume e dell'indice di refrazione dei fluidi, prodotto da pressioni idrostatiche	"	ivi
J. CROLL. Sulle modificazioni introdotte da <i>R. Wallace</i> nella teoria fisica dei cambiamenti secolari del clima	"	86
A. P. CHATTOCK. Su un metodo per determinare sperimentalmente la costante di un elettrodinamometro	"	ivi
T. MUIR. Sull'equazione generale delle differenze del 2° ordine	"	88
R. CLAUSIUS. Sulla teoria delle macchine dinamo elettriche	"	ivi
S. P. THOMPSON. Un nuovo sostegno isolante.	"	89
F. Y. EDGEWORTH. Sulla riduzione delle osservazioni	"	ivi
S. NEWCOMB. Su alcuni punti della Climatologia.	"	ivi
J. TYNDALL. Nota sull'arcobaleno bianco	"	ivi
W. w. J. NICOL. Sull'equilibrio nelle soluzioni saline	"	ivi
W. ASHTON. L'ergometro.	"	90
BOTTGER. Argentatura degli specchi	"	ivi
K. VIERORDT. Conducibilità, per il suono, del corpo umano	"	91
ABNEY. Effetti della pressione sulle lamine di gelatina	"	ivi
H. S. CHARHART. Il magnetofono	"	92
Fotografia delle fiamme di <i>Reichenbach</i>	"	ivi
Innovazioni nelle batterie secondarie	"	ivi
Lord RAYLEIGH. Dello spazio oscuro che si forma al disopra di un filo riscaldato nell'aria polverosa	"	93
OLIVER J. LODGE. Sullo spazio oscuro di Lord <i>Rayleigh</i>	"	ivi
W. A. TILDEN e W. A. SHENSTONE. Solubilità dei sali nell'acqua ad alte temperature	"	94
PUCHKOFF. Sulla costruzione della macchina d' <i>Holtz</i>	"	ivi
D. SORDI. Proiezione dello spettro magnetico	"	ivi
F. e W. KOHLRAUSCH. Equivalente elettrochimico dell'argento	"	ivi
H. T. EDDY. Sul calorico raggianti.	"	95
V. WOOD. Idem	"	ivi
G. F. FITZGERALD. Idem.	"	ivi
S. TOLVEN PARSTOW. Una spiegazione dinamica della gravitazione	"	ivi

M. D. TOMMASI. Sulle calorie di combinazione dei fluoruri solubili e sulla legge delle costanti termiche di sostituzione	pag. 188
M. PAOLO CHARPENTIER. Sopra l'espansione adiabatica del vapore di acqua	„ ivi
M. QUET. Sull'accordo teorico sperimentale nell'innalzamento dell'acqua fra lamine verticali, parallele e bagnate	„ 189
M. WILD. Nuovo metodo per determinare la inclinazione magnetica con la bussola d'induzione	„ ivi
M. LARROQUE. Sulla osservazione delle correnti telluriche	„ 190
M. W. LOUGVININE. Determinazione del calore di combustione di alcuni acetoni e dei due eteri dell'acido carbonico	„ ivi
M. E. BOUTY. Sulla conducibilità delle soluzioni saline molto diluite	„ ivi
M. IZARN. Sulla repulsione di due parti consecutive di una stessa corrente	„ 192
R. THALEN. Sopra gli spettri brillanti del didimo e del samario	„ 250
A. CROVA. Sull'igrometria	„ 251
A. BUGUET. Esperienza di elettrodinamica	„ ivi
I. TEISSIER. Nuova applicazione della macchina pneumatica	„ ivi
A. POTIER. Esperienze di V. <i>Wroblewski</i> ed <i>Olzewski</i> , per la liquefazione dell'ossigeno, dell'azoto e dell'ossido di carbonio	„ ivi
B. ELIE. Dei potenziali elettrodinamici e magnetici nella elasticità.	„ 252
A. TERQUEM. Descrizione del nuovo catetometro di M. <i>Dumoulin Froment</i>	„ ivi
E. BICHAT ed R. BLONDLOT. Influenza della pressione, sopra la differenza elettrica fra un liquido ed un metallo in contatto	„ ivi
J. BORGMANN. Sopra le dimensioni delle grandezze elettriche e magnetiche	„ 253
H. RIGOLLOT ed A. CHAVANON. Proiezione dei fenomeni acustici	„ ivi
M. DUCRETET. Galvanometro universale	„ 254
V. KARAYODINE. Nuova modificazione della pompa di <i>Toepler</i>	„ ivi
M. THOLLON. Monografia del gruppo D	„ 255
MACÉ DE LÉPINAY. Applicazione del metodo grafico del <i>Cornu</i> , allo studio delle frange di diffrazione prodotte da una bacchetta opaca	„ ivi
F.-M. RAOULT. Ricerche sulla temperatura del massimo di congelazione	„ 256
M. DIAKONOFF. Nuovo barometro a sifone	„ 257
W. VOIGT. Sopra le esperienze di M. <i>Guebhard</i>	„ ivi
M. J.-L. SORET. Ricerche sopra l'assorbimento dei raggi ultravioletti, per diverse sostanze	„ ivi
M. J.-L. SORET. Sul calore dell'acqua	„ 260
M. J.-L. SORET. Nota sulla grande trasparenza alcune volte presentata dall'atmosfera durante la pioggia	„ 262
MM. J.-L. SORET ed ED. SARASIN. Sullo spettro di assorbimento dell'acqua	„ 263
G. KAMENSKY. Nota sulla conducibilità elettrica ed altre proprietà della lega rame-antimonio	„ 264
J. CROLL. Sulla replica del Prof. <i>Newcomb</i>	„ 265
C. R. A. WRIGHT e C. THOMPSON. Sulla determinazione dell'affinità chimica in funzione della forza elettromotrice	„ ivi
LIVING e DEWAR. La temperatura delle macchie solari	„ ivi
W. E. AYRTON e J. PERRY. Istrumenti per misure elettriche a lettura diretta, e interruttore senza scintille	„ ivi
F. HIMSTEDT e prof. LARMOR. Induzione elettromagnetica nelle sfere	„ ivi
A. KUNDT. Metodo semplice per investigare la termoelettricità e la piezoelettricità nei cristalli	„ 266





NEW YORK
JAN 10 1927
LIBRARY

HW
23

SEP 3 - 1927

